Différences finies

I - Introduction

Dans ce document, nous allons montrer comment construire des différences finies afin d'approcher une dérivée à tout ordre, avec une précision d'ordre 1 ou 2. En d'autres termes, si on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on va construire des opérateurs linéaires L_{ε} tel que:

$$L_{\varepsilon}^{n}[f] \underset{\varepsilon \to 0}{=} f^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

ce qui correspond à l'ordre 1, ou bien:

$$L_{\varepsilon}^{n}[f] \underset{\varepsilon \to 0}{=} f^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

ce qui correspond à de l'ordre 2.

II - Quelques résultats de sommation

Proposition 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors on a:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i = 0$$

Démonstration. *La preuve se fait à l'aide des polynômes. En effet, notons que:*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i = Q_{n,i}(-1)$$

où le polynôme $Q_{n,i} \in \mathbb{R}_n[X]$ est donné par:

$$Q_{n,i}(X) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^i X^j$$

On a:

$$
\begin{aligned}
Q_{n,i}(X) &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^i X^j \\
&= (-1)^n X \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^i X^{j-1} \\
&= (-1)^n X \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^{i-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(X^j\right) \\
&= X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^{i-1} X^j\right] \\
&= X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} Q_{n,i-1}(X) \\
&= \cdots \\
&= \left(X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)^i Q_{n,0}(X)
\end{aligned}
$$

or, on a:

$$
\begin{aligned}
Q_{n,0}(X) &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j \\
&= (-1)^n (1+X)^n
\end{aligned}
$$

Montrons par récurrence sur i que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $R_{n,i} \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$
Q_{n,i}(X) = (1+X)^{n-i} R_{n,i}(X)
$$

- ***Initialisation***: $Q_{n,0}(X) = (-1)^n (1+X)^n$, *donc* $R_{n,0}(X) = (-1)^n$
- ***Hérédité***: *Supposons, pour $i \in [\![0, n-2]\!]$, que $Q_{n,i}(X) = (1+X)^{n-i} R_{n,i}(X)$. On a alors:*

$$
\begin{aligned}
Q_{n,i+1}(X) &= \left(X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)\left[(1+X)^{n-i} R_{n,i}(X)\right] \\
&= (n-i) X (1+X)^{n-i-1} R_{n,i}(X) + X (1+X)^{n-i} R'_{n,i}(X) \\
&= (1+X)^{n-(i+1)} R_{n,i+1}(X)
\end{aligned}
$$

où le polynôme $R_{n,i+1} \in \mathbb{R}[X]$ est donné par:

$$
R_{n,i+1}(X) = (n-i) X R_{n,i}(X) + X(1+X) R'_{n,i}(X)
$$

ce qui termine la récurrence.

Ainsi, on a, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_{n,i}(-1) = 0$, i.e:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i = 0$$

■

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur n:*

- ***Initialisation***: *Lorsque $n = 0$, nous avons:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} (-1)^{0-j} j^0 &= \binom{0}{0} (-1)^0 0^0 \\ &= 1 \\ &= 0! \end{aligned}$$

avec la convention $0^0 = 1$.

- ***Hérédité***: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n. On a, en remarquant que $0^{n+1} = 0$, le premier terme (indice $j = 0$) de cette somme qui est nul:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n+1}{j} \binom{n}{j-1} (-1)^j j^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1) \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-1)^j j^n \end{aligned}$$

Dans la somme de droite, faisons le changement d'indice $j \mapsto j+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} &= (-1)^{n+1} (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} (j+1)^n \\ &= (-1)^n (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (j+1)^n \\ &= (-1)^n (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} j^i \end{aligned}$$

On peut intervertir les deux sommes à droite:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} \quad = \quad (-1)^n (n+1) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^i \right]}_{= \ 0 \text{ si } i<n \text{ (Proposition 1)}}$$

Ainsi, on a:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} \quad = \quad (n+1) \underbrace{(-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^n}_{= \ n! \text{ (Hypothèse de récurrence)}}$$

D'où:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j^{n+1} \quad = \quad (n+1)!$$

ce qui achève la preuve par récurrence.

■

Proposition 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors on a:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^i \quad = \quad 0$$

Démonstration. *Cette preuve a la même structure que la preuve de la proposition 1. En effet, on a:*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^i \quad = \quad S_{n,i}(-1)$$

où le polynôme $S_{n,i} \in \mathbb{R}_n[X]$ est donné par:

$$S_{n,i}(X) \quad = \quad (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2j-n)^i X^j$$

On a:

$$\begin{aligned}
S_{n,i}(X) &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2j-n)^i X^j \\
&= 2X(-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2j-n)^{i-1} j X^{j-1} - n(-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2j-n)^{i-1} X^{j-1} \\
&= 2X(-1)^n \sum_{j=0}^{n} (2j-n)^{i-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(X^j\right) - nS_{n,i-1}(X) \\
&= 2X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[(-1)^n \sum_{j=0}^{n} (2j-n)^{i-1} X^j\right] - nS_{n,i-1}(X) \\
&= 2X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} S_{n,i-1}(X) - nS_{n,i-1}(X) \\
&= \left(2X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} - n\right) S_{n,i-1}(X) \\
&= \cdots \\
&= \left(2X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} - n\right)^i S_{n,0}(X)
\end{aligned}$$

or, on a:

$$\begin{aligned}
S_{n,0}(X) &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j \\
&= (-1)^n (1+X)^n
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur i que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $T_{n,i} \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$S_{n,i}(X) = (1+X)^{n-i} T_{n,i}(X)$$

- ***Initialisation***: *$S_{n,0}(X) = (-1)^n (1+X)^n$, donc $T_{n,0}(X) = (-1)^n$*
- ***Hérédité***: *Supposons, pour $i \in [\![0, n-2]\!]$, que $S_{n,i}(X) = (1+X)^{n-i} T_{n,i}(X)$. On a alors:*

$$\begin{aligned}
S_{n,i+1}(X) &= \left(2X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} - n\right)\left[(1+X)^{n-i} T_{n,i}(X)\right] \\
&= 2(n-i)X(X+1)^{n-(i+1)} T_{n,i}(X) + (X+1)^{n-i} T'_{n,i}(X) - n(X+1)^{n-i} T_{n,i}(X) \\
&= (1+X)^{n-(i+1)} T_{n,i+1}(X)
\end{aligned}$$

où le polynôme $T_{n,i+1} \in \mathbb{R}[X]$ est donné par:

$$\begin{aligned}
T_{n,i+1}(X) &= 2(n-i)XT_{n,i}(X) + (X+1)T'_{n,i}(X) - n(X+1)T_{n,i}(X) \\
&= \left[2(n-i)X - n(X+1)\right] T_{n,i}(X) + (X+1)T'_{n,i}(X)
\end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Ainsi, on a, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $S_{n,i}(-1) = 0$, i.e:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^i \quad = \quad 0$$

■

Proposition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^n \quad = \quad 2^n n!$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur n:*

- ***Initialisation**: Si $n = 0$, alors:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} (-1)^{0-j} (2j-0)^0 &= \binom{0}{0} (-1)^0 0^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

avec la convention $0^0 = 1$.

- ***Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n. On a alors:*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} (2j-(n+1))^{n+1} \\ = & \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} 2j (2j-(n+1))^n \\ - & (n+1) \underbrace{\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} (2j-(n+1))^n}_{= \ S_{n+1,n}(-1) \ = \ 0 \ (\textit{Proposition 3})} \end{aligned}$$

Notons que le premier terme de la première somme de droite est nul (indice $j = 0$):

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}(2j-(n+1))^{n+1}\\
=\;&\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}2j(2j-(n+1))^{n}\\
=\;&(-1)^n\sum_{j=1}^{n+1}\frac{n+1}{j}\binom{n}{j-1}(-1)^{1-j}2j(2j-(n+1))^{n}\\
=\;&2(-1)^n(n+1)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}(-1)^{1-j}(2j-(n+1))^{n}
\end{aligned}$$

Faisons le changement d'indice $j \mapsto j+1$ dans la dernière somme:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}(2j-(n+1))^{n+1}\\
=\;&2(-1)^n(n+1)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{-j}(2j-n+1)^{n}\\
=\;&2(-1)^n(n+1)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2j-n)^{i}
\end{aligned}$$

On peut intervertir les deux sommes:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}(2j-(n+1))^{n+1}\\
=\;&2(-1)^n(n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j}(2j-n)^{i}}_{=\;0 \text{ si } i<n \text{ (Proposition 3)}}\\
=\;&2(-1)^n(n+1)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j}(2j-n)^{n}\\
=\;&2(n+1)\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n)^{n}}_{=\;2^n n! \text{ (Hypothèse de récurrence)}}\\
=\;&2^{n+1}(n+1)!
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence et montre le résultat.

■

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^{n+1} \quad = \quad 0$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur n:*

- ***Initialisation***: *Si $n = 0$, alors:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} (-1)^{0-j} (2j-0)^{0+1} &= \binom{0}{0} (-1)^0 0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ***Hrédité***: *Soit $n \in \mathbb{N}$: Supposons la formule vraie au rang n:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} (2j-n-1)^{n+2} &= 2 \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j (2j-n-1)^{n+1} \\ &- (n+1) \underbrace{\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} (2j-n-1)^{n+1}}_{= \, 2^{n+1}(n+1)! \text{ (Proposition 4)}} \end{aligned}$$

Notons que le premier terme de la première somme de droite est nul (indice $j = 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} (2j-n-1)^{n+2} &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} j (2j-n-1)^{n+1} \\ &- 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n+1}{j} \binom{n}{j-1} (-1)^{n+1-j} j (2j-n-1)^{n+1} \\ &- 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \\ &= 2(n+1) \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-1)^{n+1-j} (2j-n-1)^{n+1} \\ &- 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \end{aligned}$$

Dans la somme de droite, on fait le changement d'indice $j \mapsto j+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}(2j-n-1)^{n+2} &= 2(n+1)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n+1)^{n+1} \\
&- 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \\
&= 2(n+1)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(2j-n)^{i} \\
&- 2^{n+1}(n+1)(n+1)!
\end{aligned}$$

On peut intervertir les deux sommes:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}(2j-n-1)^{n+2} \\
=\ & 2(n+1)\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\quad\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n)^{i}\right]}_{=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & si & i<n \quad \textit{(Prop. 3)} \\ 2^n n! & si & i=n \quad \textit{(Prop. 4)} \\ 0 & si & i=n+1 \quad \textit{(Hyp. de récurrence)}\end{array}\right.} \\
-\ & 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \\
=\ & 2(n+1)\binom{n+1}{n}2^n n! - 2^{n+1}(n+1)(n+1)! \\
=\ & 0
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence et montre le résultat.

■

En résumé, on a:

Résumé (Synthèse des propositions)

- **Propositions 1 et 2**: Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad i < n \\ n! & \text{si} \quad i = n \end{array} \right.$$

- **Propositions 3,4 et 5**: Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![0, n+1]\!]$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (2j-n)^i = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & i < n \\ 2^n n! & \text{si} & i = n \\ 0 & \text{si} & i = n+1 \end{array} \right.$$

III - Différences finies

Avant de commencer, introduisons quelques définitions. On rappelle que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, **l'opérateur de translation** de ε est donné par:

$$\begin{array}{rccc} T_\tau : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \left[\begin{array}{rccc} T_\tau[f] : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+\tau) \end{array} \right] \end{array}$$

autrement dit, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$T_\tau[f](x) = f(x+\tau)$$

Remarquons qu'il s'agit là d'un opérateur linéaire, comme tous les autres opérateurs que nous allons définir dans la définition suivante. De plus, on a, pour tous $\tau_1, \tau_2 > 0$:

$$\begin{aligned} T_{\tau_1} T_{\tau_2} &= T_{\tau_2} T_{\tau_1} \\ &= T_{\tau_1 + \tau_2} \end{aligned}$$

ainsi, deux opérateurs de translation commutent, en particulier, on a:

$$T_\tau^{-1} = T_{-\tau}$$

Définition **(Opérateur de translation - Différences finies)**

Soient $\varepsilon > 0$. On définit:

- **L'opérateur de différence finie progressive** par:

$$\delta^+ \quad := \quad \frac{T_\varepsilon - Id}{\varepsilon}$$

- **L'opérateur de différence finie rétrograde** par:

$$\delta^- \quad := \quad \frac{Id - T_{-\varepsilon}}{\varepsilon}$$

- **L'opérateur de différence finie centrée** par:

$$\begin{aligned} \delta \quad &:= \quad \frac{T_\varepsilon - T_{-\varepsilon}}{2\varepsilon} \\ &= \quad \frac{\delta^+ + \delta^-}{2} \end{aligned}$$

Proposition 6 **(Différence finie progressive)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on a:

$$(\delta^+)^n[f](x) \underset{\varepsilon \to 0}{=} f^{(n)}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat fait appel à une expression explicite de* $(\delta^+)^n$ *en fonction des puissances de* T_ε*, ainsi que des développements limités de* f*.*

- ***Expression de*** $(\delta^+)^n$*: Soit* $\varepsilon > 0$*. Les opérateurs* T_ε *et* Id *commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton:*

$$\begin{aligned} (\delta^+)^n \quad &= \quad \frac{1}{\varepsilon^n}(T_\varepsilon - Id)^n \\ &= \quad \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_\varepsilon^j \\ &= \quad \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_{j\varepsilon} \end{aligned}$$

- ***Ordre de convergence****: Ainsi, on a:*

$$(\delta^+)^n[f](x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}f(x+j\varepsilon)$$

Faisons un développement limité de f à l'ordre n en x lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
(\delta^+)^n[f](x) &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{j^i\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})\right] \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{j^i\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x)\right] \\
&+ \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\frac{j^n\varepsilon^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{1}{\varepsilon^n}\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^i\right]}_{=\ 0\ \textit{(Proposition 1)}}\frac{\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x)+\frac{1}{n!}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^n\right]}_{=\ n!\ \textit{(Proposition 2)}}f^{(n)}(x) \\
&+ \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} f^{(n)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

■

Proposition 7 (Différence finie rétrograde)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on a:

$$(\delta^-)^n[f](x) \underset{\varepsilon\to 0}{=} f^{(n)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat fait appel - comme dans la preuve de la proposition 6 - à une expression explicite de $(\delta^-)^n$ en fonction des puissances de $T_{-\varepsilon}$, ainsi que des développements limités de f.*

- ***Expression de*** $(\delta^-)^n$*: Soit $\varepsilon > 0$. Les opérateurs T_ε et Id commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton:*

$$\begin{aligned}
(\delta^-)^n &= \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}(T_{-\varepsilon}-Id)^n \\
&= \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_{-\varepsilon}^j \\
&= \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_{-j\varepsilon}
\end{aligned}$$

- ***Ordre de convergence****: Ainsi, on a:*

$$(\delta^-)^n[f](x) \quad = \quad \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}f(x-j\varepsilon)$$

Faisons un développement limité de f à l'ordre n en x lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
(\delta^-)^n[f](x) &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{j^i(-\varepsilon)^i}{i!}f^{(i)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})\right]\\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{j^i(-\varepsilon)^i}{i!}f^{(i)}(x)\right]\\
&+ \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\frac{j^n(-\varepsilon)^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{1}{\varepsilon^n}\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})\\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^i\right]}_{=\ 0\ \textit{(Proposition 1)}}\frac{(-\varepsilon)^i}{i!}f^{(i)}(x)+\frac{1}{n!}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^n\right]}_{=\ n!\ \textit{(Proposition 2)}}f^{(n)}(x)\\
&+ \mathcal{O}(\varepsilon)\\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} f^{(n)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

■

Proposition 8 (Différence finie centrée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on a:

$$\delta^n[f](x) \underset{\varepsilon\to 0}{=} f^{(n)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Démonstration. *La preuve de ce résultat fait appel - comme dans la preuve de la proposition 6 - à une expression explicite de δ^n en fonction des puissances de $T_\varepsilon, T_{-\varepsilon}$, ainsi que des développements limités de f.*

- ***Expression de*** δ^n*: Soit $\varepsilon > 0$. Les opérateurs T_ε et $T_{-\varepsilon}$ commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton:*

$$\begin{aligned}
\delta^n &= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}(T_\varepsilon - T_{-\varepsilon})^n\\
&= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_\varepsilon^jT_{-\varepsilon}^{n-j}\\
&= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T_{(2j-n)\varepsilon}
\end{aligned}$$

- ***Ordre de convergence**: Ainsi, on a:*

$$\delta^n[f](x) \;=\; \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}f(x+(2j-n)\varepsilon)$$

Faisons un développement limité de f à l'ordre $n+1$ en x lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
\delta^n[f](x) &\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(2j-n)^i\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^{n+2})\right] \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(2j-n)^n\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x)\right] \\
&+ \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\frac{(2j-n)^n\varepsilon^n}{n!}f^{(n)}(x) \\
&+ \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\frac{(2j-n)^{n+1}\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+\frac{1}{(2\varepsilon)^n}\mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n)^i\right]}_{=\;0\ (\textit{Proposition 3})}\frac{\varepsilon^i}{i!}f^{(i)}(x) \\
&+ \frac{1}{2^n n!}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n)^n\right]}_{=\;2^n n!\ (\textit{Proposition 4})}f^{(n)}(x) \\
&+ \frac{1}{2^n(n+1)!}\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}(2j-n)^{n+1}\right]}_{=\;0\ (\textit{Proposition 5})}\varepsilon f^{(n+1)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} f^{(n)}(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

■

IV - Applications

L'expression des opérateurs de différence finie permet d'approcher une dérivée partielle en espace à tout ordre. En effet, si on discrétise une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur un segment $[a,b]$ en un vecteur de $\mathbb{R}^{d+1}$ de cette forme:

$$F \;=\; \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix}$$

où, pour tout $j \in [\![0, d]\!]$ f_j est l'approximation de $f(x_j)$, où $x_j = a + \frac{j}{d}\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{b-a}{d}$ étant le pas, et que notre opérateur de différence finie L s'écrit:

$$L = \sum_{j=-n}^{n} a_j T_{j\varepsilon}$$

Alors, en introduisant la matrice de $\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$ suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & (0) \\ a_{-1} & a_0 & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & a_n \\ a_{-n} & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & a_0 & a_1 \\ (0) & & a_{-n} & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur AF va approcher $f^{(n)}(x_j)$ pour tout $j \in [\![0, d]\!]$ (en posant des conditions de nullité au bord).

Remarque. *La construction de A nécéssite que $d \geqslant n$, ce qui en pratique est bien le cas puisque l'on a intérêt à ce que d soit grand afin de gagner en précision.*

Par exemple, avec la matrice:

$$A = \frac{1}{8\varepsilon^3} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 & & (0) \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -3 \\ (0) & & -1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut approcher $f^{(3)}$ par différence finie centrée.

La méthode des différences finies est particulièrement bien adaptée au cas d'une EDP d'évolution linéaire en une dimension d'espace, où l'on applique les différences finies à la fonction $x \mapsto u(x, t_k)$, t_k, $k \in \mathbb{N}$ étant les temps utilisés pour la discrétisation en temps, puis on intègre en temps via une méthode d'EDO.