Méthode des éléments finis
-
Dimension 2

Table des matières

1 Introduction

1.1 Étude théorique

L'objectif de ce projet est d'étudier l'application de la méthode des éléments finis en dimension deux afin de résoudre le problème elliptique suivant avec conditions au bord de Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u(x) & = & f(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ u(\sigma) & = & 0 \quad , \quad \sigma \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et connexe(dont la frontière est régulière) et où l'inconnue u est un élément de $H_0^1(\Omega)$, l'espace de Sobolev [2] donné par

$$H_0^1(\Omega) \quad := \quad \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{||\cdot||_{H^1(\Omega)}}.$$

On suppose également que $f \in L^2(0,1)$.

Introduisons le problème variationnel. Si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors:

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

La formule de Green assure que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v(\sigma)\nabla u(\sigma) \cdot n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

où $n(\sigma)$ est la normale sortante à Ω en $\sigma \in \partial\Omega$. De plus, comme $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\partial\Omega} v(\sigma)\nabla u(\sigma) \cdot n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{4}$$

donnant ainsi

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x.} \tag{5}$$

Cette formulation variationnelle reste valable pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, le problème devient cette formulation, dite variationnelle:

$$\boxed{\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(\Omega),\ \ a(u,v) = L(v),} \tag{6}$$

où a est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire. a et L sont définies, pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$, par:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\mathrm{d}x \text{ et } L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

Théorème (Résolution du problème elliptique)

Il existe une unique solution au problème (6)

Démonstration. *Nous allons utiliser le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ [2] qui est un espace de Hilbert. Pour cela, nous devons vérifier trois hypothèses:*

- $\star$ *a est continue*
- $\star$ *a est coercive*
- $\star$ *L est continue*

$\star$ ***Continuité de** a**:** Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $\nabla u(x), \nabla v(x) \in \mathbb{R}^2$ donne*

$$|a(u,v)| \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)|\mathrm{d}x. \tag{8}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire donné par l'intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leqslant ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} &(9)\\ &\leqslant ||u||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)} &(10)\end{aligned}$$

donnant la continuité de a.

$\star$ ***Coercivité de** a**:** Soit $v \in H_0^1(\Omega)$.*

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x &(11)\\ &= ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} &(12)\\ &= \frac{1}{2} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}. &(13)\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$||\nabla v||_{L^2(\Omega)} \geqslant \alpha ||v||_{L^2(\Omega)}, \tag{14}$$

donc

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geqslant \frac{\alpha^2}{2} ||v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} &(15)\\ &\geqslant \frac{\min(1,\alpha^2)}{2} ||v||^2_{H^1(\Omega)}, &(16)\end{aligned}$$

donc a est coercive.

⋆ ***Continuité de*** L***:*** *Soit* $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$|L(v)| \leqslant \int_\Omega |f(x)v(x)|\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}\,||v||_{L^2(\Omega)} && (18)\\ &\leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}\,||v||_{H^1(\Omega)}\,, && (19) \end{aligned}$$

donc L *est continue.*

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution de (6).

■

C'est à partir de cette formulation variationnelle que l'on travaillera.

1.2 Introduction des éléments finis

Pour appliquer la méthode, on commence par découper Ω en une partition de mailles triangulaires, formant un maillage, noté $\mathcal{T}_h$. Si on découpe Ω en K mailles, alors on a

$$\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{K} T_k.$$

Ensuite, on approche l'espace de résolution de notre problème elliptique $H_0^1(\Omega)$, par un espace vectoriel de dimension finie, que l'on note V_h. On travaille avec les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ (i.e. de degré 1), tels que l'espace d'approximation pour les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est l'espace vectoriel des fonctions continues, affines par morceaux (i.e. affines sur les triangles T_k), nulles sur les bords du maillage. L'espace vectoriel V_h est muni d'une base de B fonctions $\mathcal{B} = \{\phi_i\}_{1\leqslant i\leqslant B}$, et notre formulation variationnelle devient

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = L(v_h)}, \tag{20}$$

où encore, en utilisant la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Pour tous } i, j \in [\![1, B]\!], a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j). \tag{21}$$

En notant

$$u_h = \sum_{i=1}^{B} u_i\phi_i$$

ainsi que

$$A_h = [a(\phi_i, \phi_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant B}\,, \quad F_h = [L(\phi_j)]_{1 \leqslant j \leqslant B} \quad \text{et } U_h = [u_i]_{1 \leqslant i \leqslant B}\,, \tag{22}$$

on trouve U en résolvant le système linéaire $A_h U_h = F_h$.

Dans le cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$, $\mathcal{B}$ des fonctions ϕ_i telles que pour tout point du maillage x_j non situé sur le bord, on a, pour tous $i, j \in [\![1, B]\!]$,

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}. \tag{23}$$

1.3 Mise en place de l'algorithme

Soit $\mathcal{T}_h$ le maillage de Ω. Soit $T_k \in \mathcal{T}_h$ une maille (où $k \in [\![1, K]\!]$) telle que

$$T_k = Conv\left(\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right\}\right). \tag{24}$$

On va raisonner "maille par maille", en construisant une base locale de fonctions $(\widetilde{\phi^{(k)}})_{\alpha \in [\![1,3]\!]}$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in [\![1, 3]\!]$,

$$\widetilde{\phi_\alpha^{(k)}}\left(x_\beta^{(k)}\right) = \delta_{\alpha,\beta} \tag{25}$$

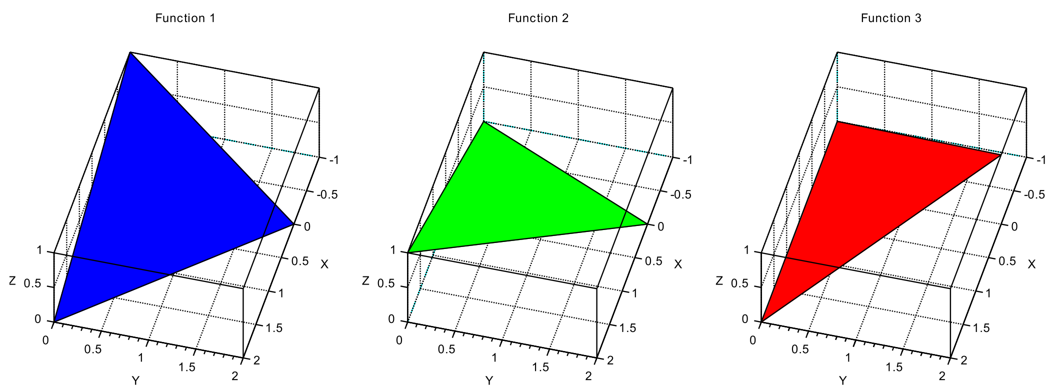

Figure 1: Fonctions de base locale pour une maille triangulaire donnée, dons les sommets sont donnés par $(-1, 0)$, $(0, 2)$ et $(2, 0)$

Par ailleurs, chaque nœud a un indice global de numérotation de l'ensemble des nœuds dans Ω, ce qui permet de reconstituer la base globale de V_h.

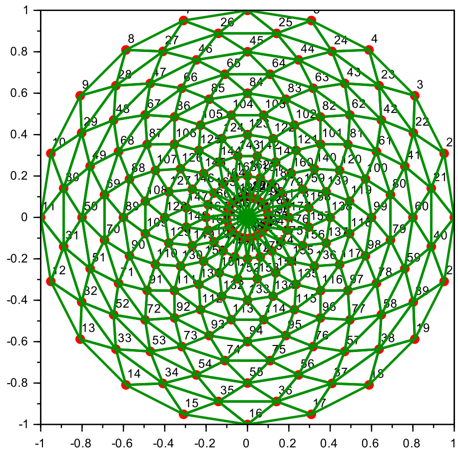

Figure 2: Exemple de maillage du disque unité. Les arrêtes sont représentées en vert et les nœuds (numérotés) en rouge. Les mailles triangulaires doivent être d'aire non nulle, et d'intersection égale à une arrête, un point ou au vide.

On définit alors les matrice et second membre élémentaires de chaque maille T_k, pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

Définition (Matrice élémentaire associée à T)

$$m_{T_k} = \left[a \left(\widetilde{\phi}_\alpha, \widetilde{\phi}_\beta \right) \right]_{\alpha,\beta \in [\![1,3]\!]} = \left[\int_{T_k} \nabla \widetilde{\phi_\alpha^{(k)}}(x) \cdot \nabla \widetilde{\phi_\beta^{(k)}}(x) \mathrm{d}x \right]_{\alpha,\beta \in [\![1,3]\!]}$$

Définition (Second membre élémentaire associé à T)

$$b_{T_k} = \left[L \left(\widetilde{\phi_\beta^{(k)}} \right) \right]_{\beta \in [\![1,3]\!]} = \left[\int_{T_k} f(x) \widetilde{\phi_\beta^{(k)}}(x) \mathrm{d}x \right]_{\beta \in [\![1,3]\!]}$$

Algorithme

On suppose les matrices et second membres élémentaires calculables par une méthode de quadrature.

Construction de A_h et de F_h:
Soit N_{int} le nombre de sommets intérieurs à Ω. $A_h = 0_{N_{int},N_{int}}$, $F_h = 0_{N_{int},0}$.

- Pour tout $T_k \in \mathcal{T}_h$ (i.e. pour tout $k \in [\![1, K]\!]$):
  - Pour tout $\beta \in [\![1, 3]\!]$:
    - i = indice global de $x_\beta^{(k)}$
    - **Si** $1 \leqslant i \leqslant N_{int}$ **et** $1 \leqslant j \leqslant N_{int}$**:**
    - $(F_h)_i = (F_h)_i + (b_{T_k})_\beta$
    - Pour tout $\alpha \in [\![1, 3]\!]$:
      - j = indice global de $x_\alpha^{(k)}$
      - **Si** $1 \leqslant i \leqslant N_{int}$ **et** $1 \leqslant j \leqslant N_{int}$**:**
      - $(A_h)_{i,j} = (A_h)_{i,j} + (m_{T_k})_{\alpha,\beta}$

Résolution de $A_h U_h = F_h$

Remarque. *Dans le programme, on a donné les indices des sommets et numéroté les fonctions de base de telle sorte que les conditions au bord (nullité) soient respectées.*

2 Mise en œuvre de la Méthode des Éléments Finis

On se place dans le cas où Ω correspond au disque unité ouvert

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \tag{26}$$

et où f est donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 4 \end{array}. \tag{27}$$

La fonction

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{array} \tag{28}$$

est solution à l'équation (1).

Le théorème de Lax-Milgram assurant l'existence et l'unicité d'une solution à cette équation, il s'agit-là de l'unique solution à (1). En appliquant l'algorithme de la partie précédente, on peut obtenir une solution approchée à l'équation, et la comparer à la solution exacte. On peut également remarquer qu'un prenant des maillages de plus en plus raffinés, l'erreur est de plus en plus faible.

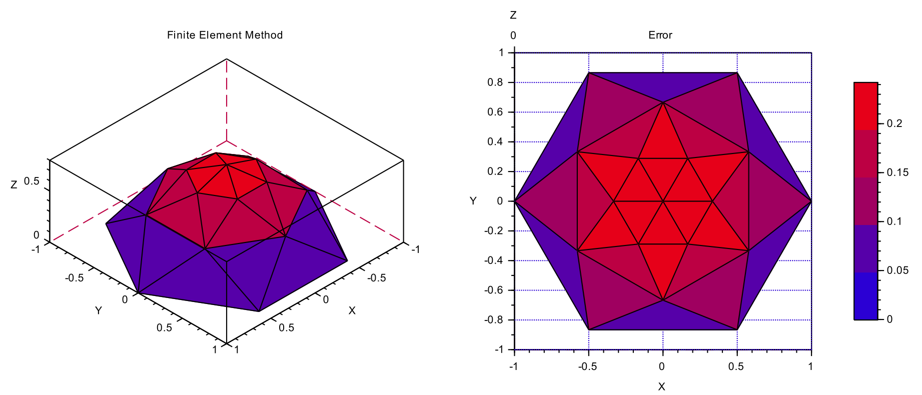

Figure 3: Resolution de l'équation (1) avec un maillage comportant 19 nœuds. A gauche: Tracé de la solution approchée u_h.

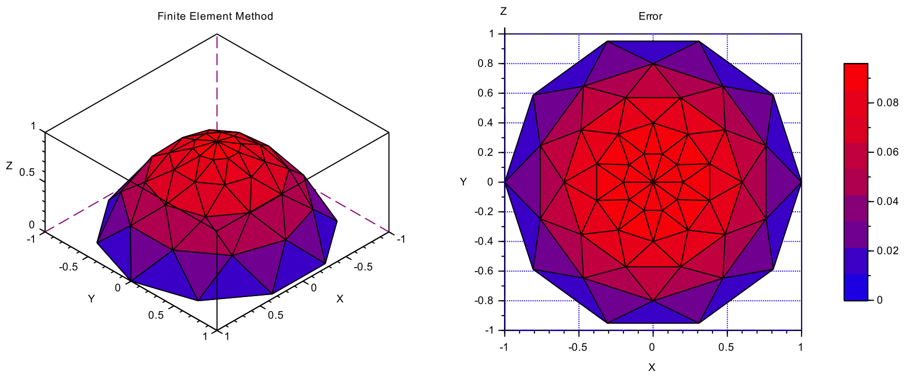

Figure 4: Resolution de l'équation (1) avec un maillage comportant 51 nœuds. A gauche: Tracé de la solution approchée u_h.

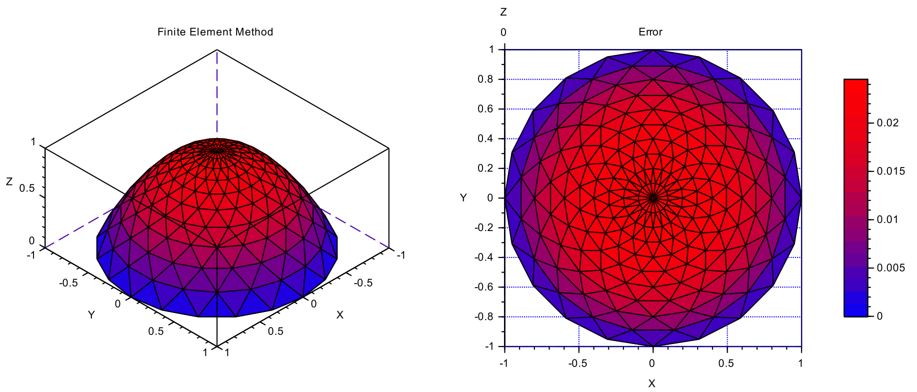

Figure 5: Resolution de l'équation (1) avec un maillage comportant 201 nœuds. A gauche: Tracé de la solution approchée u_h.

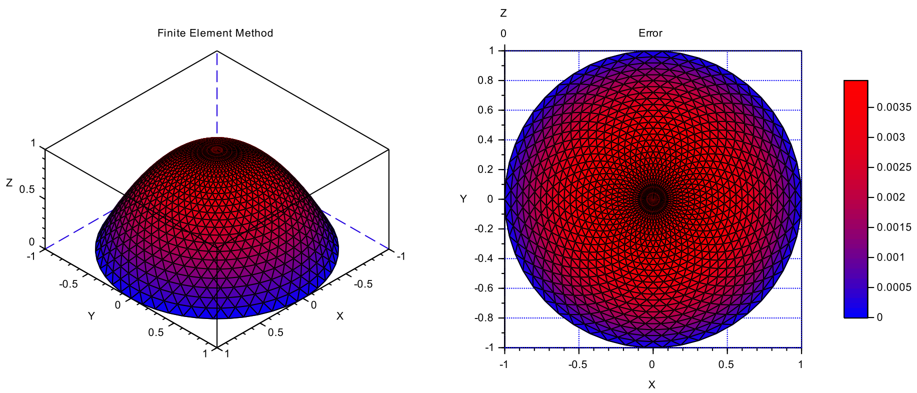

Figure 6: Resolution de l'équation (1) avec un maillage comportant 1251 nœuds. A gauche: Tracé de la solution approchée u_h.

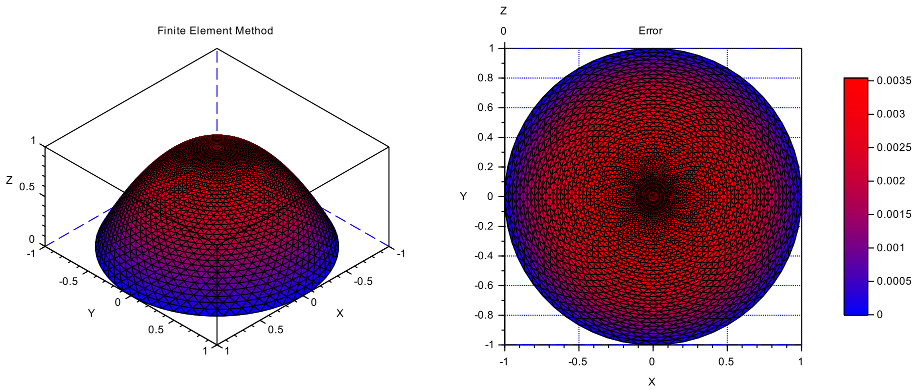

Figure 7: Resolution de l'équation (1) avec un maillage comportant 2401 nœuds. A gauche: Tracé de la solution approchée u_h.

3 Ordre de convergence

On définit tout d'abord le diamètre maximal d'un maillage:

Définition (Diamètre maximal d'un maillage)

$$\delta(\mathcal{T}_h) := \underset{T \in \mathcal{T}_h}{\text{Max}}\, diam(T), \tag{29}$$

où $diam(T)$ est le diamètre d'une maille:

$$diam(T) = \underset{x,y \in T}{\text{Sup}}\, |x - y| \tag{30}$$

Théorème (Ordre de convergence pour les éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange en dimension 2)

Soit u_h la solution approchée - continue et affine par morceaux- de u pour le problème (6) associé à l'équation (1). En notant h le diamètre maximal du maillage $\mathcal{T}_h$. Si $u \in H^2(\Omega)$, on a pour tout $h > 0$,

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leqslant C_0 \left|\left|\nabla^2 u\right|\right|_{L^2(\Omega)} h^2 \tag{31}$$

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \left|\left|\nabla^2 u\right|\right|_{L^2(\Omega)} h \tag{32}$$

où $C_0, C_1 > 0$ sont des constantes indépendantes de h.

On va donc mettre en pratique ces résultats pour le problème (1), toujours avec la même fonction f:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 4 \end{array}, \tag{33}$$

et par conséquent la même solution exacte:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{array}. \tag{34}$$

On fait des simulations pour des maillages contenant $2n^2 + 1$ nœuds pour $n \in [\![3, 12]\!]$. Les erreurs sont tracées en échelle logarithmique, puis l'ordre de convergence est numériquement calculé par régression linéaire.

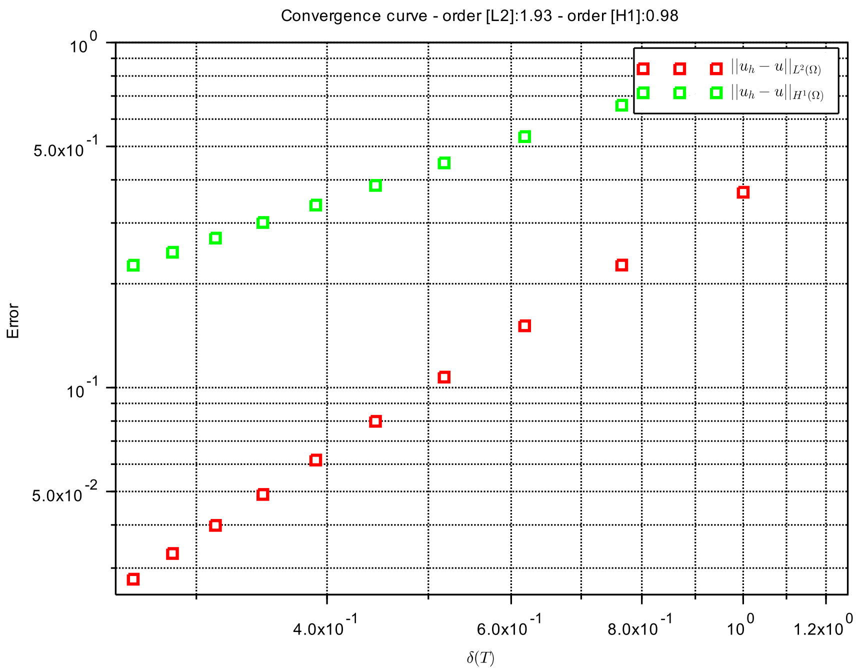

Figure 8: Courbes de convergence en norme L^2 (rouge), et H^1 (vert).

On obtient numériquement ces ordres de convergence:

Norme	Théorique	Numérique
$L^2(\Omega)$	2	1.93
$H^1(\Omega)$	1	0.98

Bibliographie

[1] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.

[3] Patrick Ciarlet and Eric Luneville. *La méthode des éléments finis: de la théorie à la pratique*. ISTE Group, 2022.

[4] Philippe G Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.

A Méthodes de calcul

A.1 Détermination d'une base locale

Pour une maille triangulaires T, dont les sommets sont donnés par X_1, X_2 et X_3, on souhaite déterminer les trois fonctions $\widetilde{\phi}_1$, $\widetilde{\phi}_2$ et $\widetilde{\phi}_3$ telles que, pour tous $i, j \in [\![1,3]\!]$,

$$\widetilde{\phi}_i(x_j) = \delta_{i,j}. \tag{35}$$

De plus, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, les fonctions $\widetilde{\phi}_i$ sont données par

$$\widetilde{\phi}_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & a_{1,i} + a_{2,i}x_1 + a_{3,i}x_2 \end{array}. \tag{36}$$

Ainsi, la condition (35) devient ce système d'équations:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_1^{(1)} & X_1^{(2)} \\ 1 & X_2^{(1)} & X_2^{(2)} \\ 1 & X_3^{(1)} & X_3^{(2)} \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

où, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $X_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)})$.

Théorème (Inversibilité de la matrice M)

La matrice M est inversible si et seulement si les points X_1, X_2 et X_3 ne sont pas alignés.

Démonstration. *La matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or, on a, par opération élémentaire sur les lignes*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & X_1^{(1)} & X_1^{(2)} \\ 0 & X_2^{(1)} - X_1^{(1)} & X_2^{(2)} - X_1^{(2)} \\ 0 & X_3^{(1)} - X_1^{(1)} & X_3^{(2)} - X_1^{(2)} \end{vmatrix} \tag{38}$$

$$= \begin{vmatrix} X_2^{(1)} - X_1^{(1)} & X_2^{(2)} - X_1^{(2)} \\ X_3^{(1)} - X_1^{(1)} & X_3^{(2)} - X_1^{(2)} \end{vmatrix} \tag{39}$$

Ce déterminant est non su si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{X_1X_2}$ et $\overrightarrow{X_1X_3}$ ne sont pas colinéaires, autrement dit, si les points X_1, X_2 et X_3 ne sont pas alignés.

■

Comme les cellules du maillage sont de mesure non nulle, la matrice M est donc toujours inversible, et il est par conséquent toujours possible de déterminer les fonctions de la base locale.

A.2 Diamètre d'une cellule triangulaire

Afin de déterminer le diamètre maximal d'un maillage, il est nécessaire de déterminer le diamètre d'un tringle. Une cellule triangulaire a pour diamètre le plus grand de ses côtés:

$$diam\left(Conv\left(\{X_1, X_2, X_3\}\right)\right) = Max\left\{|X_2 - X_1|, |X_3 - X_2|, |X_1 - X_3|\right\} \tag{40}$$