Feuille d'exercices numéro 5, OM3.
Fonctions à plusieurs variables, extrêma.

Exercice 1
Déterminer les développements de Taylor à l'ordre précisé pour les fonctions suivantes au voisinage des points précisés :
- $f(x,y) = \sin x/y$ à l'ordre 2 au voisinage du point $(\pi/2, 1)$,
- $f(x,y) = (1+x) : (1+x^2+y^4)$ à l'ordre 2 au voisinage de l'origine,
- $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ à l'ordre 3 au voisinage du point $(1,0)$,
- $f(x,y) = 1/(2+x-2y)$ à l'ordre 3 au voisinage du point $(2,1)$.

Exercice 2
On considère la fonction $f(x,y) = \exp(x-y) - x - y - 1$. La relation $f(x,y) = 0$ définie-t-elle au voisinage de l'origine une fonction implicite $y = \phi(x)$ satisfaisant à la relation $f(x, \phi(x)) = 0$ pour x appartenant à un certain voisinage de 0 ? Dans le cas affirmatif, calculer le développement limité à l'ordre deux de la fonction ϕ au voisinage de 0.

Exercice 3
Même questions que l'exercice précédent avec la fonction $f(x,y) = \arctan(xy) - \exp(x+y) + 1$ au voisinage de l'origine.

Exercice 4
Même questions que l'exercice 2 pour la fonction $f(x,y) = x \exp y - y + 1$ au voisinage du point $(-1,0)$.

Exercice 5
Montrer que l'équation
$$x + 2y + z + \exp(2z) = 1$$
admet une solution de la forme $z = f(x,y)$ au voisinage du point $(x,y) = (0,0)$ où $f(0,0) = 0$. Déterminer une approximation polynomiale de degré 2 de f au voisinage de $(0,0)$ en puissances de x et y.

Exercice 6
Soient x et y deux nombres réels strictement positifs dont le produit est égal à 1. Déterminer si leurs somme passe par un extremum.

Exercice 7
Étudier au voisinage de l'origine le signe des fonctions suivantes :
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + x^3 + y^3 \ ; \ g(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + 3xy^2 + y^3 \ ; \ h(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 \ ;$$

Exercice 8
Trouver l'équation du plan tangent à la surface définie par le graphe de la fonction : $f(x,y) = x^2 - y^2$ au point $(a,a,0)$.

Exercice 9
Même question avec la surface : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xyz = 1\}$ au point $(2, 1, 1/2)$.

Exercice 10
Trouver tous les points P situés sur la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x^2 - y^2 + z^2 = 25\}$ pour lesquels le plan tangent $T_P S$ est orthogonal à l'axe Oz.

Exercice 11
Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas d'extrémum local en l'origine :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2 \ \ ; \ \ g(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x) \ \ ;$$

Exercice 12
Déterminer et étudier les extrémum des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \ \ ; \ \ f(x, y) = xy + \ln(1 + y) \ \ ; \ \ f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3 \ \ ;$$

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin(x + y) \ \ ; \ \ f(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2 \ \ ;$$

Exercice 13
Soit α un nombre réel, on considère la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \dfrac{1}{1 + \alpha^2 x^2 + y^2}$. Déterminer les valeurs de α pour que la fonction f admette un minimum local en l'origine.

Exercice 14
Trouver et classifier les points critiques de la fonction $z = f(x, y)$ qui satisfait à l'équation implicite

$$\exp\left(2zx - x^2\right) - 3\exp\left(2zy + y^2\right) = 2.$$

Exercice 15
Déterminer tous les extréma locaux et globaux ainsi que les points selles de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le domaine : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 16
Même questions que l'exercice précédent avec la fonction : $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ et le domaine : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 1 \ \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 17
Même question que l'exercice 15 pour la fonction $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$ et le domaine : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 18
Même question que l'exercice 15 mais pour la fonction $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ et le domaine : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x, \ \ 0 \leq y \ \text{ et } \ 0 \leq x + y \leq \pi\}$.

Exercice 19
Trouver les extréma de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $3x^2 + 2xy + 5y^2 = 72$.

Exercice 20
Même question que l'exercice précédent avec la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz = 1$.

Exercice 21
Même question que l'exercice 14 mais pour la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et les deux contraintes $x + y + z = 1$ et $xy = 1$.

Exercice 22
La température sur la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est décrite par la fonction $f(x, y, z) = 2 + xz + y^2$. Déterminer les points les plus chauds et les plus froids.

Exercice 23
Soient des nombres réels positifs $a_1, a_2, ...a_n$, on appelle inégalité arithmético-géométrique l'inégalité :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer cette inégalité.

1) Déterminer la valeur maximale de la fonction $f(x_1, x_2, ...x_n) = x_1^2 x_2^2 ... x_n^2$ sur la sphère $S = \{(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = r^2\}$ de rayon r. Expliquer l'existence de cette valeur maximale (*hors programme*).
2) Déduire de la question précédente l'inégalité :

$$x_1^2 x_2^2 ... x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}\right)^n$$

3) Conclure.