NOM et Prénom: ....

Outils Mathématiques 3 - CC n°1
Durée: 1 heure
DOCUMENTS, TÉLÉPHONES ET CALCULATRICES SONT INTERDITS

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Une importance sera accordée dans la notation à la qualité des raisonnements ainsi qu'au soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général:

$$u_n = \frac{4n}{n^3+2n+12}$$

1) (1 point) Calculer la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) (1,5 point) Vérifier la majoration $u_n \leqslant \frac{4}{n^2}$.
3) (2,5 points) On considère le réel 10^{-4}. En utilisant la question précédente, trouver un entier N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant 10^{-4}$$

Correction

1) On peut noter $n^3+2n+12 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, donc, en appliquant le quotient aux équivalents, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$. Cette suite est donc de limite nulle.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une étude de fraction montre que:

$$\begin{aligned} u_n - \frac{4}{n^2} &= \frac{4n^3 - 4n^4 - 4(2n+12)}{n^2(n^3+2n+12)} \\ &= \frac{-4(2n+12)}{n^2(n^3+2n+12)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc on a la majoration souhaitée.

3) Si on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{4}{n^2} \leqslant \frac{4}{N^2} \leqslant 10^{-4}$, alors pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \frac{4}{n^2} \leqslant 10^{-4}$ (on peut mettre la valeur absolue car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{4}{N^2} \leqslant 10^{-4}$. Alors $\frac{2}{N} \leqslant 10^{-2}$, donc $N \geqslant 2 \cdot 10^2 = 200$. Pour tout $n \geqslant 200$, on a:

$$|u_n| \leqslant 10^{-4}$$

Exercice 2 (5 points)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général suivant:

$$u_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{2+\frac{1}{n}}}$$

1) (1,5 point) Calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) (1 point) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) (1,5 point) Trouver une majoration pour v_n.

4) (1 point) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a (en notant que $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$):

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

2) On a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par la règle de d'Alembert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{2+\frac{1}{n}}} &= e^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)\ln(n)} \\ &\leqslant e^{-2\ln(n)}\end{aligned}$$

Donc $v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

4) Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, par encadrement, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3 (5 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini comme suit:

$$u_n \quad = \quad \begin{cases} \frac{\sin(n)}{n+1} & \text{si} \quad n = 2k \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

où k est un entier naturel.

1) (1,5 point) Donner un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) (1,5 point) Donner un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) (1 point) Calculer les limites des deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}).

4) (1 point) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Pourquoi ?

Correction

1) Si $n = 2k$, alors $u_n \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1$ et si $n = 2k+1$, alors $u_n \leqslant 3+1 = 4$. Donc 4 est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (On prend le plus grand des majorants de chaque sous-suite).

2) Si $n = 2k$, alors $u_n \geqslant -\frac{1}{n+1} \geqslant -1$ et si $n = 2k+1$, alors $u_n \geqslant 3$. Donc -1 est un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (On prend le plus petit des minorants de chaque sous-suite).

3) On sait que, puisque $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$, alors $\frac{-1}{2k+1} \leqslant u_{2k} \leqslant \frac{1}{2k+1}$. Par encadrement, on a $u_{2k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   De plus, on a $\frac{1}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.

4) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toutes ses sous-suites convergent également, vers la mêmem limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, les deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) n'ont pas la même limite, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 4 (6 points)
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général:

$$u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

1) (1 point) Donner les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) (1 point) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) (1 point) Donner les quatre premiers termes de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire u_0, ... , $u_0 + \cdots + u_3$.

4) (1 point) Soit X un réel et n un entier positif. Donner une autre expresison de la somme $1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.

5) (1 point) En déduire l'expression des sommes partielles de la série $\sum u_n$ (c'est-à-dire $u_0 + \cdots + u_n$).

6) (1 point) Trouver la limite de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1) Les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donnés par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{10}$, $u_2 = \frac{1}{100}$ et $u_3 = \frac{1}{1000}$.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10} \in]-1,1[$, donc est de limite nulle.

3) Les quatre premiers termes de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par $u_0 = 1$, $u_0 + u_1 = \frac{11}{10} = 1.1$, $u_0 + u_1 + u_2 = \frac{111}{100} = 1.11$, $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1111}{1000} = 1.111$.

4) Cette somme est la somme des termes d'une suite géométrique de raison X, et elle vaut:

$$1 + X + \cdots + X^n = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

5) En remplaçant X par $\frac{1}{10}$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right]$$

6) Comme $0 \leqslant \frac{1}{10} < 1$, cette série géométrique converge, et, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{10}{9}$$