NOM et Prénom: ....

Outils Mathématiques 3 - CC n°3
Durée: 1 heure 30
DOCUMENTS, TÉLÉPHONES ET CALCULATRICES SONT INTERDITS

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Une importance sera accordée dans la notation à la qualité des raisonnements ainsi qu'au soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 (5 points)

On considère les fonctions:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{bmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

et:

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & ve^u \end{array}$$

Calculer la jacobienne de la fonction $g \circ f$ en $(1,0)$ (on ne cherchera pas à calculer directement $g \circ f$).

Correction

D'après la formule donnant la jacobienne de la composée, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(g \circ f)(x,y) = Jac(g)(f(x,y)) \times Jac(f)(x,y)$$

Ainsi, on sait que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(g)(u,v) = \begin{bmatrix} ve^u & e^u \end{bmatrix}$$

donnant ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(g)(f(x,y)) = Jac(g)(y^2, -x^2) = \begin{bmatrix} -x^2e^{y^2} & e^{y^2} \end{bmatrix}$$

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ -2x & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(g \circ f)(x,y) = \begin{bmatrix} -x^2e^{y^2} & e^{y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ -2x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2xe^{y^2} & -2x^2ye^{y^2} \end{bmatrix}$$

Finalement, si $(x,y) = (1,0)$, on a: $Jac(g \circ f)(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 2 (5 points)
On considère la fonction f définie comme suit:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) (1.5 points) Montrer que f est continue en $(0,0)$. On pourra d'abord montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy^3| \leqslant (x^2+y^2)^2$

2) (1.5 points) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et calculer la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3) (2 points) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction

1) Tout d'abord, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, ainsi, on a $|xy^3| \leqslant (x^2+y^2)^2$. En divisant, on a:

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Comme on a $x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, par majoration, on en déduit que:

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

Autrement dit, f est continue en $(0,0)$.

2) Soient $h, k \in \mathbb{R}$. On remarque que $f(h,0) = f(0,k) = f(0,0) = 0$. Ainsi, nous avons:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3) Si f est différentiable en $(0,0)$, alors elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et la différentielle de f et $(0,0)$ est donnée par $\mathrm{d}f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ est proche de $(0,0)$, alors on a:

$$f(h,k) = f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

Ainsi, puisque $f(0,0) = 0$, on a:

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Puisque l'on a $|h|, |k| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$, alors on obtient:

$$|\varepsilon(h,k)| \leqslant \frac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{h^2+k^2} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 (5 points)
On considère la fonction suivante:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y)^2 + \sin(xy) \end{array}$$

1) (1 point) Justifier du fait que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) (2 points) Calculer la matrice jacobienne de f.

3) (2 points) Calculer la matrice hessienne de f.

Correction

1) f est somme d'une fonction polynomiale en (x,y) et d'une composée de fonction trigonométrique et du produit $(x,y) \longmapsto xy$. Toutes ces fonctions étant bien de classe $\mathcal{C}^2$, f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) On peut faire un calcul direct de dérivées partielles. Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y) + y\cos(xy) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y) + x\cos(xy)$$

donnant ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jac(f)(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 2(x+y) + y\cos(xy) & 2(x+y) + x\cos(xy) \end{array}\right]$$

3) Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz assure que l'ordre des dérivées partielles n'a pas d'importance, ainsi, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Un calcul direct donne:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2 - y^2\sin(xy) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2 - x^2\sin(xy) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & 2 + \cos(xy) - xy\sin(xy) \end{array}$$

Ainsi, la matrice hessienne de f est donnée, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par:

$$H(f)(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 2 - y^2\sin(xy) & 2 + \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ 2 + \cos(xy) - xy\sin(xy) & 2 - x^2\sin(xy) \end{array}\right]$$

Exercice 4 (5 points)
On considère le champ de vecteur suivant:

$$\vec{F}(x,y,z) \quad = \quad 2x(yz)^2\vec{i} + 2y(xz)^2\vec{j} + 2z(xy)^2\vec{k}$$

1) (2 points) Calculer $div(\vec{F})$.

2) (2 points) Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{F})$.

3) (1 point) Le champ $\vec{F}$ est-il un champ de gradient (si c'est le cas, on ne cherchera pas à calculer le potentiel).

Correction

1) D'après la définition de la divergence, on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$div(\vec{F})(x,y,z) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[2x(yz)^2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2y(xz)^2\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2z(xy)^2\right]$$

Soit finalement:

$$div(\vec{F})(x,y,z) = 2\left[(yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2\right]$$

2) Par définition du rotationnel, on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F})(x,y,z) = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 2x(yz)^2 \\ 2y(xz)^2 \\ 2z(xy)^2 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 4zyx^2 - 4yzx^2 \\ 4zxy^2 - 4xzy^2 \\ 4yxz^2 - 4xyz^2 \end{array} \right.$$

Finalement, on a:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F})(x,y,z) \quad = \quad \vec{0}$$

3) Comme le rotationnel de $\vec{F}$ est nul, $\vec{F}$ est bien un champ de gradient.