

Méthode des éléments finis

-

Projet

Remerciements

Je remercie Nicolas SEGUIN pour son aide apportée dan la rédaction de ce projet, ainsi que les conseils donnés en vue de l'améliorer.

Table des matières

- Table des matières** **3**

- 1 Introduction** **4**
 - 1.1 Étude théorique 4
 - 1.2 Introduction des éléments finis 6
 - 1.3 Mise en place de l'algorithme 8

- 2 Étude de quelques cas particuliers de λ** **10**
 - 2.1 Équation de Poisson ($\lambda = 0$) 10
 - 2.2 λ est constante et tend vers 0. 11

- 3 Ordre de convergence dans le cas $k = 1$** **14**

- 4 Illustration de la méthode à pas adaptatif** **17**

1

Introduction

1.1 Étude théorique

L'objectif de ce projet est d'étudier l'application de la méthode des éléments finis en une dimension afin de résoudre le problème elliptique suivant:

$$(E) \quad \begin{cases} -u'' + \lambda u = f & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où l'inconnue u est un élément de $H_0^1(0, 1)$, l'espace de Sobolev donné par:

$$H_0^1(0, 1) := \overline{\mathcal{D}(0, 1)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$$

et où $\lambda \in L^\infty([0, 1])$, telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\lambda(x) \geq 0$. On suppose également que $f \in L^2(0, 1)$.

Introduisons le problème variationnel:

Si $v \in \mathcal{D}(0, 1)$, on a alors:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 \lambda(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Une intégration par parties assure que:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \lambda(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Si on suppose maintenant que $v \in H_0^1(0, 1)$, par densité de $\mathcal{D}(0, 1)$ dans $H_0^1(0, 1)$ pour $\|\cdot\|_{H^1}$, on obtient alors, pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \lambda(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Autrement dit, le problème devient cette formulation, dite variationnelle:

(FV_E) : "Trouver $u \in H_0^1(0, 1)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$: $a(u, v) = L(v)$ "

où:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \lambda(x)u(x)v(x)dx \\ L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Théorème (Résolution du problème elliptique)

Il existe une unique solution au problème (FV_E)

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace $H_0^1(0, 1)$ qui est un espace de Hilbert. Pour cela, nous devons vérifier trois hypothèses:

★ a est continue

★ a est coercive

★ L est continue

★ **Continuité de a :** Soient $u, v \in H_0^1(0, 1)$:

$$|a(u, v)| \leq \int_0^1 |u'(x)v'(x)|dx + \int_0^1 |\lambda(x)u(x)v(x)|dx$$

Comme $\lambda \in L^\infty([0, 1])$, on a:

$$|a(u, v)| \leq \int_0^1 |u'(x)v'(x)|dx + \|\lambda\|_{L^\infty} \int_0^1 |u(x)v(x)|dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|\lambda\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (1 + \|\lambda\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

donc a est continue.

★ **Coercivité de a :** Soit $v \in H_0^1(0, 1)$:

$$a(v, v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx + \int_0^1 \lambda(x)v(x)^2 dx$$

or, λ est positive sur $[0, 1]$, donc:

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \int_0^1 v'(x)^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$, $\|v'\|_{L^2} \geq \alpha \|v\|_{L^2}$, donc:

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \frac{\alpha^2}{2} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{\min(1, \alpha^2)}{2} \|v\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Donc a est coercive.

★ **Continuité de L :** Soit $v \in H_0^1(0, 1)$:

$$|L(v)| \leq \int_0^1 |f(x)v(x)| dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient:

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Donc L est continue.

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution de (FV_E) . ■

C'est à partir de cette formulation variationnelle que l'on travaillera.

1.2 Introduction des éléments finis

Pour appliquer la méthode, on commence par découper $[0, 1]$ en une partition de mailles (sous-segments), formant un maillage, noté \mathcal{T}_h . Si on découpe $[0, 1]$ en $J + 1$ mailles, alors on a:

$$[0, 1] = \bigsqcup_{i=0}^J [x_i, x_{i+1}]$$

avec $x_0 = 0$ et $x_{J+1} = 1$.

Ensuite, on approche l'espace de résolution de notre problème elliptique $H_0^1(0, 1)$, par un espace vectoriel de dimension finie, que l'on note V_h . On travaille avec les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 (i.e. de degré respectifs 1 et 2), tels que:

- ★ L'espace d'approximation pour les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 est l'espace vectoriel des fonctions continues, affines par morceaux (i.e. affines sur les segments $[x_j, x_{j+1}]$), nulles en 0 et 1.
- ★ L'espace d'approximation pour les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_2 est l'espace vectoriel des fonctions continues, polynomiales de degré 2 par morceaux (i.e. polynomiales de degré 2 sur les segments $[x_j, x_{j+1}]$), nulles en 0 et 1.

L'espace vectoriel V_h est muni d'une base de fonctions $\mathcal{B} = \{\phi_i\}_i$, et notre formulation variationnelle devient:

"Trouver $u_h \in V_h$ tel que, pour tout $v_h \in V_h$, $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ "

où encore, en utilisant la base \mathcal{B} :

"Pour tous $\phi_i, \phi_j \in \mathcal{B}$, $a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j)$ "

En notant:

$$u = \sum_i u_i \phi_i$$

ainsi que:

$$\begin{aligned} A &= [a(\phi_i, \phi_j)]_{i,j} \\ B &= [L(\phi_j)]_j \\ U &= [u_i]_i \end{aligned}$$

On trouve U en résolvant le système linéaire $AU = B$.

- ★ Dans le cas des éléments finis \mathbb{P}_1 , \mathcal{B} comporte J fonctions telles que pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, J \rrbracket$, $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
- ★ Dans le cas des éléments finis \mathbb{P}_2 , \mathcal{B} comporte $2J + 1$ fonctions. En effet, sur chaque maille $[x_i, x_{i+1}]$, on rajoute un nœud intermédiaire $x_{i+\frac{1}{2}}$, au milieu de la maille. Comme dans le cas \mathbb{P}_1 , on impose que chaque fonction vaut 1 en un seul nœud, et 0 sur les autres nœuds.

1.3 Mise en place de l'algorithme

Soit \mathcal{T}_h le maillage de $[0, 1]$. Soit $T \in \mathcal{T}_h$ une maille. Soit k le degré des éléments finis choisis: $k \in \{1, 2\}$, puisque l'on travaille avec les éléments \mathbb{P}_k de Lagrange.

On va raisonner "maille par maille", en construisant une base "locale" de fonctions $(\tilde{\phi})_\alpha$ telles que:

- ★ Si $k = 1$, $T = [X_1, X_2]$, alors, pour tous $\alpha, \beta \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $\tilde{\phi}_\alpha(X_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$.
- ★ Si $k = 2$, $T = [X_1, X_2]$ et X_3 est le point intermédiaire, alors, pour tous $\alpha, \beta \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\tilde{\phi}_\alpha(X_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$.

On construit la base locale à partir de polynômes interpolateurs de Lagrange. Si $k = 1, 2$, on a donc respectivement $d_k = 2, 3$ fonctions composant la base locale dans T . T a alors d_k nœuds.

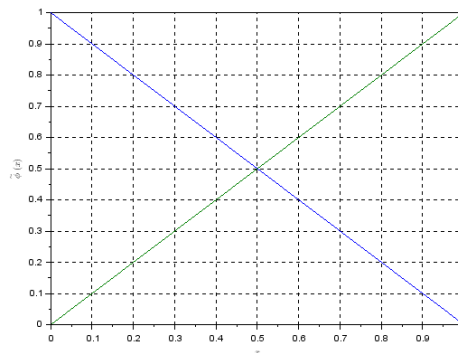


Figure 1.1: Fonctions de base locale dans le cas $k = 1$ si $T = [0, 1]$. $\tilde{\phi}_1$ est tracée en bleu et $\tilde{\phi}_2$ en vert.

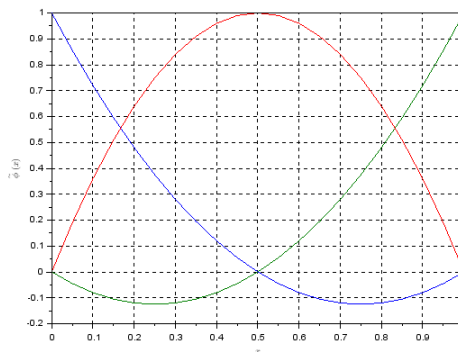


Figure 1.2: Fonctions de base locale dans le cas $k = 2$ si $T = [0, 1]$. $\tilde{\phi}_1$ est tracée en bleu, $\tilde{\phi}_2$ en vert et $\tilde{\phi}_3$ en rouge.

Par ailleurs, chaque nœud a un indice global de numérotation de l'ensemble des nœuds dans $[0, 1]$, ce qui permet de reconstituer la base globale de V_h .

On définit alors les matrices et second membre élémentaires de T :

Définition (Matrice élémentaire associée à T)

$$m_T = \left[a(\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\phi}_\beta) \right]_{\alpha, \beta \in \llbracket 1, d_k \rrbracket} = \left[\int_T \tilde{\phi}'_\alpha(x) \tilde{\phi}'_\beta(x) + \lambda(x) \tilde{\phi}_\alpha(x) \tilde{\phi}_\beta(x) dx \right]_{\alpha, \beta \in \llbracket 1, d_k \rrbracket}$$

Définition (Second membre élémentaire associé à T)

$$b_T = \left[L(\tilde{\phi}_\beta) \right]_{\beta \in \llbracket 1, d_k \rrbracket} = \left[\int_T f(x) \tilde{\phi}_\beta(x) dx \right]_{\beta \in \llbracket 1, d_k \rrbracket}$$

Algorithme

On suppose les matrices et second membres élémentaires calculables par une méthode de quadrature (pour nous Gauss-Legendre à quatre points).

Construction de A_h et de F_h :

Soit N_{int} le nombre de sommets intérieurs à $[0, 1]$ (i.e. tous les sommets ou nœuds-sauf 0 et 1, $N_{int} = J$ si $k = 1$ et $N_{int} = 2J + 1$ si $k = 2$.) $A_h = 0_{N_{int}, N_{int}}$, $F_h = 0_{N_{int}, 0}$.

- Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:
 - Pour tout $\beta \in \llbracket 1, d_k \rrbracket$:
 - $i =$ indice global de X_β
 - Pour tout $\alpha \in \llbracket 1, d_k \rrbracket$:
 - $j =$ indice global de X_α
 - **Si** $1 \leq i \leq N_{int}$ **et** $1 \leq j \leq N_{int}$:
 - $(F_h)_i = (F_h)_i + (b_T)_\beta$
 - $(A_h)_{i,j} = (A_h)_{i,j} + (m_T)_{\alpha,\beta}$

Résolution de $A_h U_h = F_h$

Remarque. Dans le programme, on a donné les indices des sommets et numéroté les fonctions de base de telle sorte que les conditions au bord (nullité) soient respectées.

2

Étude de quelques cas particuliers de λ

2.1 Équation de Poisson ($\lambda = 0$)

On se retrouve donc à étudier ce problème elliptique:

$$(P) \begin{cases} -u'' = f & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour ce premier exemple, prenons une fonction f continue:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 6 \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

Un calcul montre que $u : x \mapsto -\left|x - \frac{1}{2}\right|^3 + \frac{1}{8}$ est la solution de (P) . Sur le graphique, on remarque, avec $k = 1$, que le tracé de la solution est correct, pour un maillage uniforme avec un pas de 0.1.

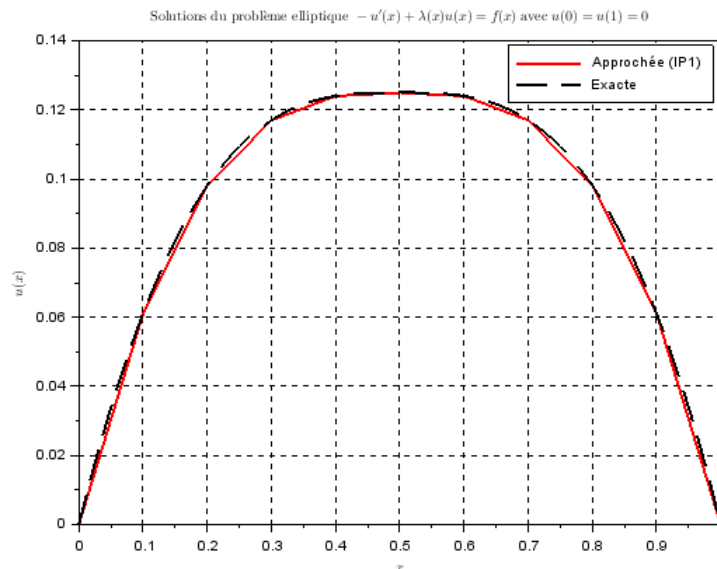


Figure 2.1: Tracé de la solution avec $f(x) = 6 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ et comparaison avec la solution exacte

On peut améliorer la précision en augmentant le degré, et en prenant un maillage plus fin. Voici un second tracé avec $k = 2$, et un maillage uniforme de pas 0.05:

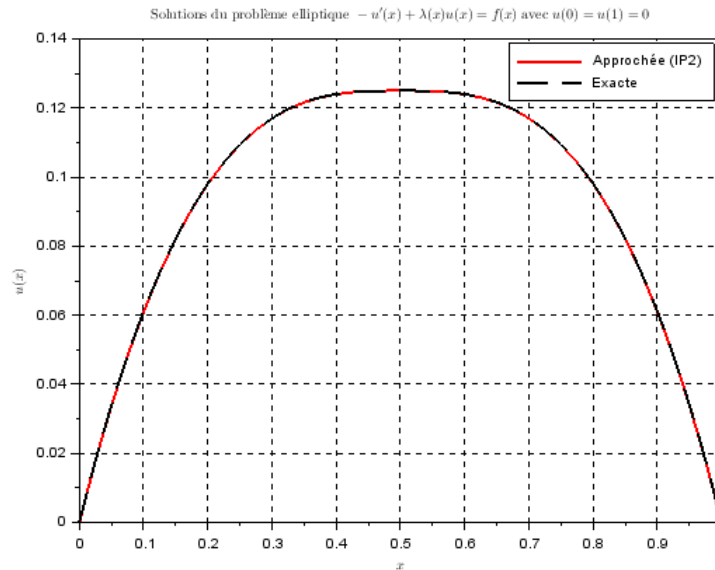


Figure 2.2: Tracé plus précis de la solution avec $f(x) = 6 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ et comparaison avec la solution exacte

On remarque que la précision est déjà bien meilleure.

2.2 λ est constante et tend vers 0.

On admettra tout d’abord ce théorème, dont la démonstration, calculatoire, repose sur la théorie des équations différentielles:

Théorème

Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$. La solution de (E) est donnée, pour tout $x \in [0, 1]$, par:

$$u(x) = H(\lambda)sh(\sqrt{\lambda}x) - \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{\lambda}} sh(\sqrt{\lambda}(x-t))dt$$

où:

$$H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}sh(\sqrt{\lambda})} \int_0^1 f(t)sh(\sqrt{\lambda}(1-t))dt$$

Démonstration. En utilisant la définition du sinus hyperbolique, on montre que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$u(x) = H(\lambda)sh(\sqrt{\lambda}x) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}x} \int_0^x f(t)e^{-\sqrt{\lambda}t} dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x} \int_0^x f(t)e^{\sqrt{\lambda}t} dt$$

Puis, en dérivant, on a:

$$u(x) = \sqrt{\lambda}H(\lambda)ch(\sqrt{\lambda}x) - \frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}x} \int_0^x f(t)e^{-\sqrt{\lambda}t}dt + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\lambda}x} \int_0^x f(t)e^{\sqrt{\lambda}t}dt$$

De même, en dérivant à nouveau puis en utilisant la définition du sinus hyperbolique encore une fois:

$$u(x) = H(\lambda)sh(\sqrt{\lambda}x) - \sqrt{\lambda} \int_0^x f(t)sh(\sqrt{\lambda}(x-t))dt - f(x)$$

On vérifie alors facilement que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$-u''(x) + \lambda u(x) = f(x)$$

et $u(0) = u(1) = 0$. Par unicité de la solution, il s'agit de la solution au problème (E). ■

De plus, le théorème de convergence dominée assure que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$u(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} x \int_0^1 f(t)(1-t)dt - \int_0^x f(t)(x-t)dt$$

Ainsi, un simple calcul de dérivées montre que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_0^1 f(t)(1-t)dt - \int_0^x f(t)dt \\ u''(x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc u est la solution à l'équation de Poisson (P). Si on choisit pour fonction f la fonction $f : x \mapsto 6|x - \frac{1}{2}|$, alors on trouve:

$$u(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} -\left|x - \frac{1}{2}\right|^3 + \frac{1}{8}$$

ce qui correspond bien à la solution.

Au travers de cet exemple, vérifions si, numériquement, la méthode des éléments finis "respecte" cette convergence. Nous résolvons $-u'' + \lambda u = f$, où $f : x \mapsto 6|x - \frac{1}{2}|$, avec un maillage uniforme de pas 0.05, un degré $k = 2$, en prenant pour λ des valeurs de plus en plus petites:

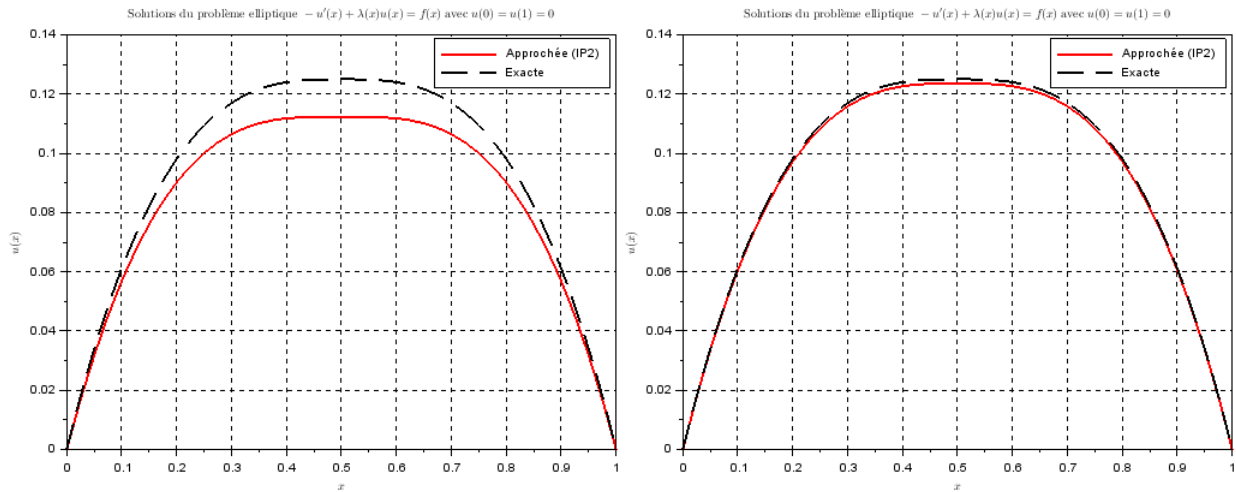


Figure 2.3: Tracé de la solution avec $\lambda = 1$ (à gauche) et $\lambda = 0.1$ (à droite), pour $k = 2$. La solution "limite", correspondant au cas $\lambda = 0$, est affichée en pointillés noirs.

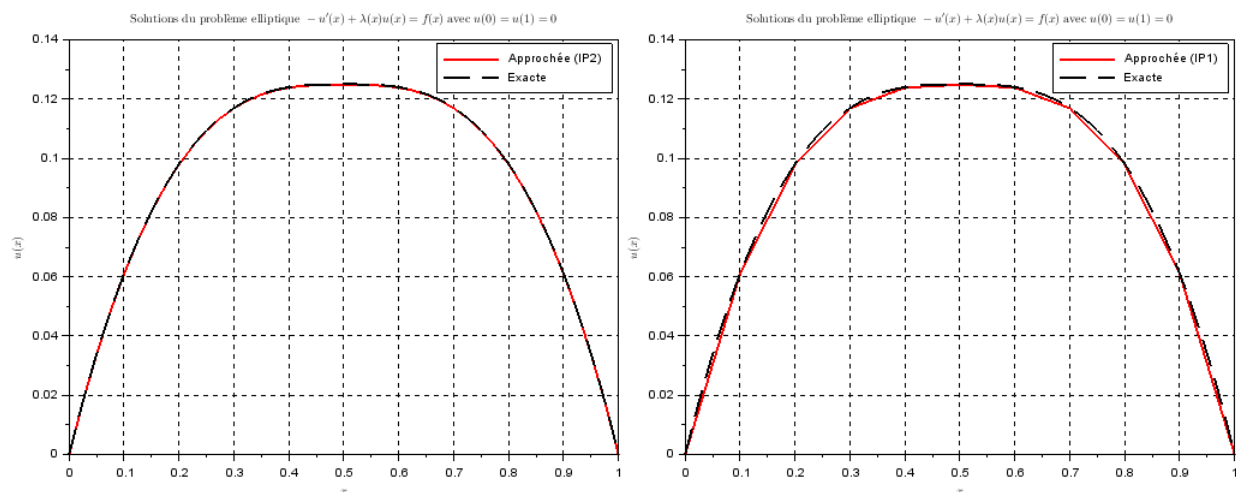


Figure 2.4: Tracé de la solution avec $\lambda = 0.01$ et $k = 2$ (à gauche). La solution obtenue se rapproche de la solution approchée de (E) à mesure que λ devient petit. Et cette propriété semble se conserver même avec un maillage moins resserré et un degré plus petit. Par exemple, voici le cas $\lambda = 0.01$ avec $k = 1$ et un maillage uniforme de pas 0.1 (à droite). La solution "limite", correspondant au cas $\lambda = 0$, est affichée en pointillés noirs.

3

Ordre de convergence dans le cas $k = 1$

On se place dans le cadre d'un maillage uniforme, de pas $h > 0$. Ce maillage est donc donné par:

$$\mathcal{T}_h = \{[x_i, x_{i+1}], i \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket\}$$

où $J \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de mailles. Pour tout $i \in \llbracket 0, J \rrbracket$, on a $x_i = ih$.

Théorème (Ordre de convergence pour les éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange)

Soit u_h la solution approchée - continue et affine par morceaux- de u pour le problème (E). On alors, pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned} \|u' - u'_h\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{2}{3}h \|u''\|_{L^2(0,1)} \\ \|u - u_h\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{2}{3\sqrt{3}}h^2 \|u''\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

Soit ainsi:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} &\leq \frac{2}{3} \left(1 + \frac{h^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} h \|u''\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante (on suppose h borné).

Démonstration. Donnons les grandes lignes de la démonstration:

★ **Estimation en norme L^2 .** Sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a:

$$\begin{aligned} u'(x) - u'_h(x) &= u'(x) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) - u'(t) dt \end{aligned}$$

Donc on a:

$$|u'(x) - u'_h(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \int_t^x u''(s) ds \right| dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\begin{aligned} |u'(x) - u'_h(x)| &\leq \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\sqrt{x-t}}_{\leq \sqrt{x_{i+1}-t}} \left(\int_t^x |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \frac{2}{3} h^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Par élévation au carré et intégration sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_h(x)|^2 dx \leq \frac{4}{9} h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds$$

Par sommation sur $i \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket$, on a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u'(x) - u'_h(x)|^2 dx &\leq \frac{4}{9} h^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}^2 \\ \|u' - u'_h\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{2}{3} h \|u''\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

★ **Estimation en norme H^1** : Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a $u'_h(x_i) = u'(x_i)$, donc:

$$\begin{aligned} u(x) - u_h(x) &= \int_{x_i}^x u'(t) - u'_h(t) dt \\ |u(x) - u_h(x)| &\leq \int_{x_i}^x |u'(t) - u'_h(t)| dt \end{aligned}$$

Par l'inégalité 3.1, on a:

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \frac{2}{3} h^{\frac{1}{2}} (x - x_i) \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par élévation au carré et intégration sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_h(x)|^2 dx &\leq \frac{4}{9} h \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 dx}_{= \frac{h^3}{3}} \\ &\leq \frac{4}{27} h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Par sommation sur $i \in \llbracket 0, J - 1 \rrbracket$, on a :

$$\int_0^1 |u'(x) - u'_h(x)|^2 dx \leq \frac{4}{27} h^4 \sum_{i=0}^{J-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds$$

$$\|u' - u'_h\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} h \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

On en déduit immédiatement le résultat concernant la norme H^1



On va donc mettre en pratique ces résultats pour le problème (P), toujours avec la même fonction f :

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 6 \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

On trouve que, pour tout $x \in [0, 1]$, $u(x) = -\left|x - \frac{1}{2}\right|^3 + \frac{1}{8}$.

On fait des simulations numériques pour les pas de subdivision $h \in \{2^{-5}, 2^{-5.2}, 2^{-5.4}, \dots, 2^{-7}\}$, en traçant $\log \|u - u_h\|$ en fonction de $\log(h)$, et la pente de la droite fournit l'estimation de l'ordre de convergence.

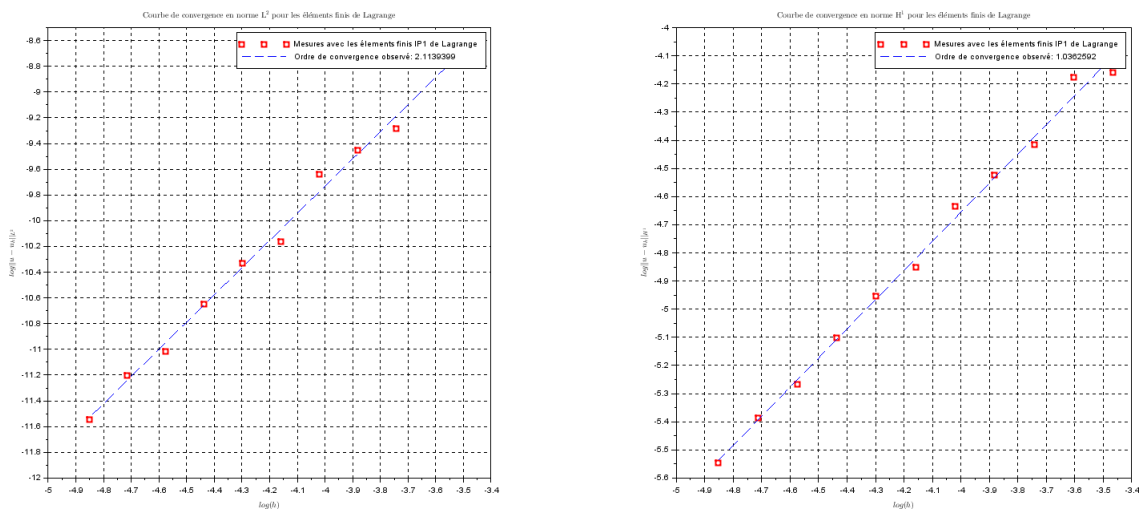


Figure 3.1: Courbes de convergence en norme L^2 (à gauche), et H^1 (à droite) avec $k = 1$. La droite en pointillés bleus a été tracée à partir d'une régression linéaire $\log \|u - h_h\| = a \log h + b$

4

Illustration de la méthode à pas adaptatif

L'un des avantages de la méthode des éléments finis est que l'on peut choisir un maillage non uniforme, afin de raffiner ce dernier à des endroits où la solution doit être tracée plus précisément.

Afin d'illustrer la méthode à pas adaptatif, on considère l'équation de Poisson (P), avec $\lambda = 0$ et:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathbf{1}_{\{x < 0.5\}}$$

Cette fonction reproduit de fortes oscillations au voisinage de 0. Pour approcher la solution correctement, on raffine le maillage en divisant par 2 le pas de subdivision sur les endroits du maillage où la solution approchée varie d'une étape du raffinement à la suivante. De plus, à la première étape, on regarde tout le maillage, à la seconde, on raffinerait au besoin $[0, 0.5]$ ou $[0.5, 1]$. A la troisième étape, on étudierait les portions de maillage $[0, 0.25]$, $[0.25, 0.5]$, $[0.5, 0.75]$ et $[0.75, 1]$, et ainsi de suite.

Voici les listes des points du maillage raffinés:

```
List1 = [0.2;0.4;0.6;0.8];
List2 = [0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9];
List3 = [(0.05:0.05:0.45)';(0.5:0.1:0.9)'];
List4 = [(0.025:0.025:0.475)';(0.5:0.1:0.9)'];
List5 = [(0.0125:0.0125:0.2375)';(0.25:0.025:0.475)';(0.5:0.1:0.9)'];
List5 = [(0.00625:0.00625:0.24375)';(0.25:0.025:0.475)';(0.5:0.1:0.9)'];
List6 = [(0.003125:0.003125:0.246875)';(0.25:0.025:0.475)';(0.5:0.1:0.9)'];
List7 = [(0.0015625:0.0015625:0.2484375)';(0.25:0.025:0.475)';(0.5:0.1:0.9)'];
```

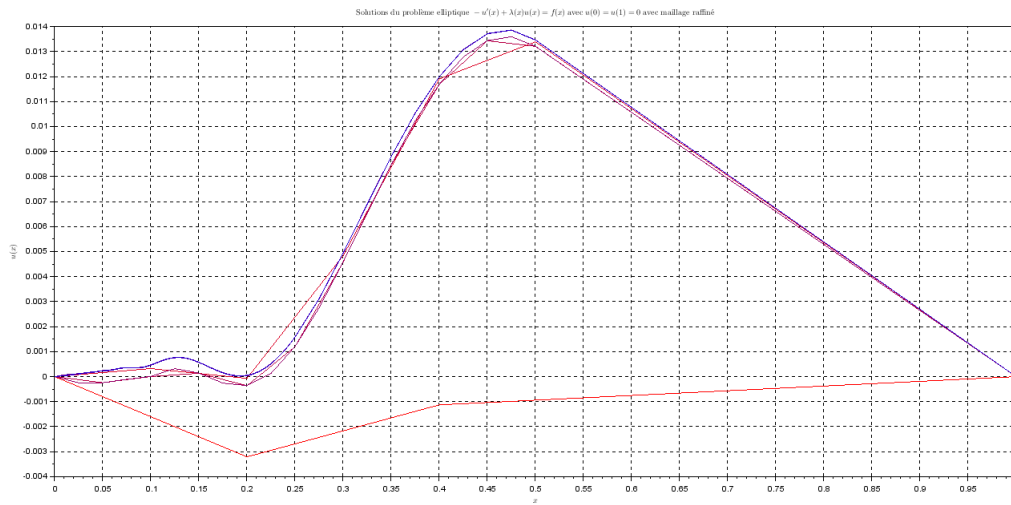


Figure 4.1: Solutions approchées avec 7 étapes de raffinement de maillage. Plus une courbe est bleue, plus elle est "raffinée". On s'arrête quand la différence entre deux courbes devient "petite", ce qui est le cas ici avec les deux dernières courbes bleues. Le critère de petitesse n'est ici pas choisi, mais on peut par exemple prendre la distance uniforme entre deux courbes. Si cette distance devient petite, la suite d'approximations est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, qui est complet ($H_0^1(0, 1) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$), donc converge.

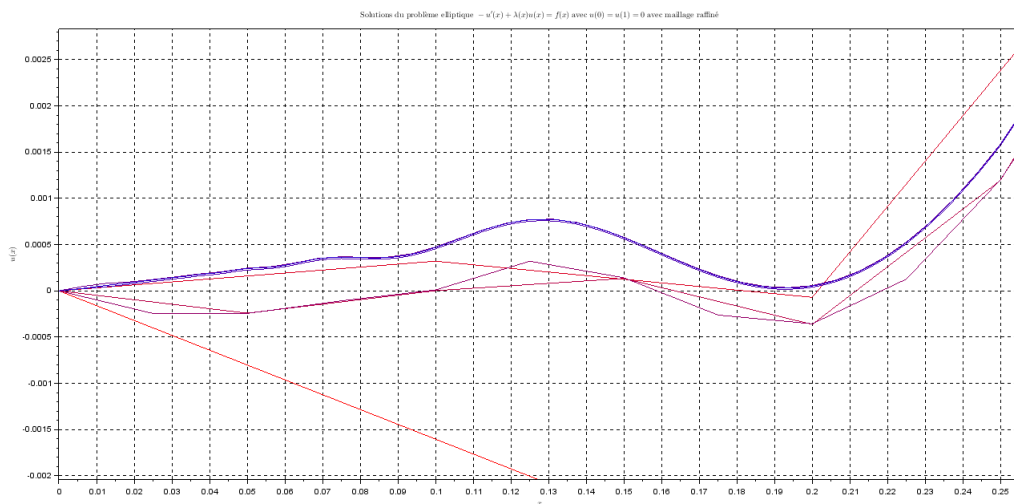


Figure 4.2: Solutions approchées avec zoom sur la portion $[0, 0.25]$, qui a dû être la plus raffinée, en raison des fortes oscillations au voisinage de 0.