Rapport de présentation de leçon

Leçon 150: Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

Leçon encadrée par Matthieu ROMAGNY
Présentation réalisée le 31 Mars 2020

Remerciements

Je remercie Matthieu ROMAGNY pour l'aide apportée ainsi que les conseils donnés dans la préparation de cette leçon. Je remercie également ma collègue Maud pour m'avoir aidé et conseillé dans la préparation de cette leçon en binôme.

Contexte général

Cette présentation de leçon ne s'est pas déroulée dans des conditions normales, mais a eu lieu par visio-conférence (sur Discord), durant le confinement, en raison de la pandémie de COVID-19. Il s'agit ainsi de la première leçon présentée en visio-conférence dans la préparation à l'agrégation de Rennes.

Introduction

Cette leçon fait un pont entre la théorie des groupes et l'algèbre linéaire. Autrement dit, il s'agit de caractériser des éléments d'algèbre linéaire (formes normales, réductions, décompositions matricielles...) via des éléments de théorie des groupes (actions de groupe, orbites, stabilisateurs, invariants...). Des applications sont faites aux systèmes linéaires, décompositions matricielles, réductions des endomorphismes, formes quadratiques...

L'autre grande idée réside dans le titre de la leçon: "Espaces de matrices". C'est-à-dire que l'on considère soit un espace vectoriel, ce qui se traduit par des résultats d'algèbre linéaire ou bilinéaire, soit un espace topologique, ce qui se traduit par des résultats de continuité, d'homomorphismes via des décompositions matricielles.

Plan et développement

Le plan se décompose en quatre parties:

I-Action par translation

Description de l'action, application aux décompositions matricielles (QR, polaire)

II-Action par équivalence

Description de l'action, application aux systèmes linéaires (Pivot de Gauss, opérations élémentaires, formes échelonnées de matrices)

III-Action par conjugaison

Description de l'action, dont certains invariants (trace, déterminant, polynôme minimal et caractéristique, rang), application à la réduction des endomorphismes (Jordan, Frobenius, matrices diagonalisables...)

IV-Action par congrunce

Description de l'action, définition de certains groupes de matrices comme stabilisateurs. Application aux formes quadratiques (théorème d'inertie de Sylvester, réduction des endomorphismes orthogonaux en parallèle avec l'action par conjugaison)

Les deux développements proposés étaient les suivants:

⋆ Décomposition polaire

⋆ Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

Le premier développement (Décomposition polaire) a été choisi.

Questions sur le développement

- **Question 1: Comment montrer que $S^2 = S'^2 \Rightarrow S = S'$, où $S, S', S^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$**

  Réponse: Cela revient à montrer l'existence d'une unique racine carrée pour une matrice symétrique définie positive. S^2 et S commutent, et sont alors co-diagonalisables (i.e diagonalisables dans une base commune), donc, via un polynôme interpolateur de Lagrange, on peut dire que S est un polynôme en S^2, et, S' est un polynôme en $S'^2 = S^2$, donc commute avec S, et S et S' sont co-diagonalisables, et, vu que l'on impose $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les valeurs propres sont toutes strictement positives, donc identiques.

- **Question 2: La vérification de $Q^TQ = I_n$ sachant que $QQ^T = I_n$ est-t-elle nécessaire ?**

  Réponse: Non, si $AB = I_n$, alors on a automatiquement $BA = I_n$. En effet, si $AB = I_n$, alors, en passant aux déterminants, il vient $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(A), \det(B) \neq 0$, et A et B sont inversibles. Ainsi, on a $ABA = A$, et comme A est inversible, on multiplie à gauche par A^{-1} donnant ainsi $BA = I_n$.

Questions sur le plan (exercices)

- **Question 3: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe (on pourra montrer qu'il est connexe par arcs)**

  Réponse: Si N est nilpotente, alors tN l'est aussi, où $t \in [0, 1]$ (on parle bien de cône nilpotent), donc on a la connexité par arcs (toute matrice nilpotente est reliée à la matrice nulle par un chemin continu).

- **Question 4: Si on note A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang au plus r, alors montrer que A est connexe**

  Réponse: On utilise la forme normale donnée par la matrice $J_{n,n,r}$ donnée par:

$$J_{n,n,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  et on relie cette matrice à la matrice nulle par $tJ_{n,n,r}$, où $t \in [0, 1]$.

- **Question 4 (suite): Et pour les matrices de rang exactement r ?**

  Réponse: Pas forcément, par exemple, pour $r = n$, les matrices de rang exactement n, i.e. $GL_n(\mathbb{R})$, ne constituent pas un ensemble connexe. En effet, si c'était le cas, alors $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ serait un connexe de $\mathbb{R}$ (comme image d'un connexe par $\det$, qui est continue), ce qui est faux. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.