

Modèle SIR



Introduction

Dans ce document, nous allons présenter le modèle SIR, qui est un modèle de base en modélisation des épidémies, également appelé modèle compartimental. La présentation commencera par la modélisation du problème et l'établissement du système différentiel modélisant le phénomène, puis se poursuivra par l'étude de ce système différentiel, et enfin, une dernière partie sera consacrée à la résolution numérique des équations différentielles.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Modélisation | 4 |
| 1.1 | Présentation du problème | 4 |
| 1.2 | Etablissement du système d'équations différentielles | 4 |
| 2 | Etude analytique du système différentiel | 6 |
| 2.1 | Existence, unicité et prolongement d'une solution | 6 |
| 2.1.1 | Conditions initiales | 6 |
| 2.1.2 | Existence et unicité d'une solution locale | 6 |
| 2.1.3 | Positivité | 7 |
| 2.1.4 | Prolongement de la solution locale en solution globale | 8 |
| 2.2 | Comportement de la solution | 8 |
| 2.2.1 | Portrait de phase | 8 |
| 2.2.2 | Limites en $t \rightarrow +\infty$ | 10 |
| 2.2.3 | Comportement de S et I lorsque $R_0 > 1$ | 11 |
| 2.2.4 | Etude des points d'équilibre | 11 |
| 2.3 | Immunité collective | 14 |
| 3 | Résolution numérique d'équations différentielles | 15 |
| 3.1 | Lemme de Grönwall discret | 16 |
| 3.2 | Méthodes numériques | 17 |
| 3.2.1 | Méthode d'Euler Explicite | 17 |
| 3.2.2 | Méthode de Runge-Kutta 2 (RK2) | 19 |
| 4 | Annexe: Simulations numériques | 23 |
| 4.1 | Choix des paramètres | 23 |
| 4.2 | Calcul des solutions exactes | 23 |
| 4.3 | Choix de la méthode d'intégration d'une équation différentielle | 25 |
| 4.3.1 | Intégration d'une équation différentielle | 25 |
| 4.3.2 | Ordre de convergence | 25 |

Partie 1

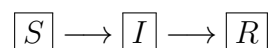
Modélisation

1.1 Présentation du problème

On considère une maladie infectieuse qui se propage au sein d'une population constituée de N individus, N étant un entier naturel supérieur à 2. La maladie possède ces propriétés:

- Un individu est malade pendant une durée moyenne T_r , appelée temps de rétablissement, et, pendant cette durée, va contaminer R_0 personnes, R_0 est appelé nombre de reproduction de base.
- Un individu guéri de la maladie est immunisé et ne peut ainsi pas la contracter une seconde fois.

On note S le nombre d'individus susceptibles d'être contaminés, I le nombre d'individus infectés et R le nombre d'individus guéris de la maladie. On peut représenter la façon dont se déroule l'épidémie via ce diagramme (c'est ce qu'on appelle un modèle compartimental [1]):



Par ailleurs, on ne tient compte d'aucune variation de population (naissances-décès i.e. on impose $S + I + R = N = \text{constante}$), et on suppose que le R_0 reste fixe (par exemple, on ne tend pas à réduire ce taux de reproduction via des mesures de confinement par exemple).

1.2 Etablissement du système d'équations différentielles

Théorème (Système différentiel)

Si S , I et R sont des fonctions dépendant du temps, alors elles vérifient le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= -\frac{R_0}{T_r N} I S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{T_r} I \left(\frac{R_0}{N} S - 1 \right) \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{T_r} I \end{cases}$$

Démonstration. Nous allons établir ce modèle en raisonnant sur ce qu'il se passe pendant une durée de temps Δt , à partir d'un temps fixé t , i.e. entre les instants t et $t + \Delta t$:

- Une personne infectée contamine R_0 personnes pendant une durée T_r . Ainsi, $\beta := \frac{R_0}{T_r}$ correspond au nombre de personnes infectées par unité de temps. Ainsi, pendant une durée Δt , une personne infectée va contaminer $\beta \Delta t$ personnes.
- Ainsi, $I(t)$ personnes infectées vont contaminer $\beta \Delta I(t)$ personnes saines (du groupe S), car une personne infectée ne peut l'être, et une personne rétablie est immunisée et ne peut pas contracter une nouvelle fois la maladie. C'est pourquoi il nous faut multiplier la quantité $\beta \Delta t I(t)$ par la proportion de personnes saines $\frac{S(t)}{N}$ afin d'obtenir le nombre de personnes qui sera réellement contaminé. On peut voir la multiplication par $\frac{S(t)}{N}$ comme la prise en compte de la probabilité qu'une personne puisse effectivement être contaminée. L'opposé de la variation d'individus sains entre t et $t + \Delta t$ correspondant à celle de nouvelles personnes infectées, on a:

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta \Delta t I(t) \frac{S(t)}{N} \quad (1.1)$$

- Pour les personnes rétablies de la maladie, si T_r est le temps moyen de guérison, notons $\gamma := \frac{1}{T_r}$ le nombre de personnes guéries par unité de temps (vitesse de guérison). Entre t et $t + \Delta t$, $\gamma \Delta t I(t)$ personnes vont guérir (multiplication par le nombre de personnes infectées). On a ainsi:

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \gamma \Delta t I(t) \quad (1.2)$$

- Pour ce qui est de la variation du nombre de personnes infectées entre t et $t + \Delta t$, le fait que $S + I + R$ reste constante au cours du temps assure que:

$$S(t + \Delta t) + I(t + \Delta t) + R(t + \Delta t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (1.3)$$

soit alors:

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \beta \Delta t \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \quad (1.4)$$

On arrive donc à ce système d'équations discrètes:

$$\begin{cases} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\beta \frac{I(t)S(t)}{N} \\ \frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t} = \beta \Delta t \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} = \gamma I(t) \end{cases}$$

On fait tendre Δt vers 0, et on remplace β par $\frac{R_0}{T_r}$ et γ par $\frac{1}{T_r}$, donnant ainsi:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = -\frac{R_0}{T_r N} I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt}(t) = \frac{1}{T_r} I(t) \left(\frac{R_0}{N} S(t) - 1 \right) \\ \frac{dR}{dt}(t) = \frac{1}{T_r} I(t) \end{cases}$$

■

Partie 2

Etude analytique du système différentiel

Le système différentiel à étudier est:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= -\frac{R_0}{T_r N} IS \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{T_r} I \left(\frac{R_0}{N} S - 1 \right) \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{T_r} I \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1 Existence, unicité et prolongement d'une solution

2.1.1 Conditions initiales

On pose $(S, I, R)(0) = (N - I_0, I_0, 0)$, où I_0 est le nombre de personnes infectées au départ (comprenant le patient zéro). Il est également possible d'immuniser une partie de la population (par vaccination par exemple) avec cette condition initiale: $(S, I, R)(0) = (N - I_0 - V_0, I_0, V_0)$. On peut également se placer dans le cadre d'une condition initiale au temps $t_0 \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Existence et unicité d'une solution locale

Théorème (Existence & unicité d'une solution locale)

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Le système (2.1) ayant pour condition initiale $(S, I, R)(t_0) = (N - I_0 - V_0, I_0, V_0)$ admet une unique solution sur un intervalle $]T_-(t_0), T_+(t_0)[$ où $T_-(t_0) < t_0 < T_+(t_0)$.

Démonstration. Posons $X = (S, I, R) \in \mathbb{R}^3$. Le système (2.1) s'écrit:

$$\frac{dX}{dt}(t) = F(t, X(t)) \quad (2.2)$$

où la fonction F est donnée par:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, X) \longmapsto \left(-\frac{R_0 IS}{T_r N}, \frac{I}{T_r} \left(\frac{R_0 S}{N} - 1 \right), \frac{I}{T_r} \right)$$

F est polynomiale en ses variables d'espace, donc de classe \mathcal{C}^1 . F est donc localement lipschitzienne par rapport à X . Donc, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système

(2.1) ayant pour conditions initiales $X(t_0) = (N - I_0 - V_0, I_0, V_0)$, ce qui correspond à un problème de Cauchy, admet une unique solution sur un intervalle $]T_-(t_0), T_+(t_0)[$, où $T_-(t_0) < t_0 < T_+(t_0)$.

■

2.1.3 Positivité

Théorème (Positivité)

Supposons que $S(0), I(0) > 0$ et $R(0) \geq 0$. Alors, pour tout $t \in]0, T_+(0)[$, on a $S(t), I(t), R(t) > 0$

Démonstration. - Soit $R^* \in \mathbb{R}$. La solution $t \mapsto (N - R^*, 0, R^*)$ est solution de (2.1) avec pour condition initiale $(S, I, R)(t_0) = (N - R^*, 0, R^*)$ pour tout $t_0 \in]T_-(0), T_+(0)[$. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est la seule solution à ce problème de Cauchy. Donc, supposons que $I(0) = I_0 > 0$ et qu'il existe $t_0 \in]T_-(0), T_+(0)[$ tel que $I(t_0) = 0$. Alors on a :

$$(S, I, R)(t_0) = (S(t_0), 0, R(t_0)) \quad (2.3)$$

$$= (N - R(t_0), 0, R(t_0)) \quad (2.4)$$

Or, l'unique solution vérifiant cette condition est la fonction constante $t \mapsto (N - R(t_0), 0, R(t_0))$, donc associée à la condition initiale $I(0) = 0$, ce qui est absurde. Donc, pour tout $t \in]T_-(0), T_+(0)[$, $I(t) > 0$

- De même, $t \mapsto (0, I_0 e^{-\frac{t-t_0}{T_r}}, N - I_0 e^{-\frac{t-t_0}{T_r}})$ est solution de (2.1) ayant pour condition initiale $(S, I, R)(0) = (0, I_0, N - I_0)$ pour tout $t_0 \in]T_-(0), T_+(0)[$. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est la seule solution à ce problème de Cauchy. Donc supposons que $S(0) > 0$ et qu'il existe $t_0 \in]T_-(0), T_+(0)[$ tel que $S(t_0) = 0$. Alors on a :

$$(S, I, R)(t_0) = (0, I(t_0), R(t_0)) \quad (2.5)$$

$$= (0, I(t_0), N - I(t_0)) \quad (2.6)$$

Or, l'unique solution vérifiant cette condition initiale est $t \mapsto (0, I_0 e^{-\frac{t-t_0}{T_r}}, N - I_0 e^{-\frac{t-t_0}{T_r}})$, donc ayant pour condition initiale $S(0) = 0$, ce qui est absurde. Donc, pour tout $t \in]T_-(0), T_+(0)[$, $S(t) > 0$.

- Enfin, comme, pour tout $t \in]0, T_+(0)[$, on a $\frac{dR}{dt}(t) = \frac{1}{T_r} I(t)$, on obtient ainsi, pour tout $t \in]0, T_+(0)[$:

$$R(t) = R(0) + \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Comme $R(0) \geq 0$, et $I(t) > 0$ pour tout $t \in]T_-(0), T_+(0)[$, la stricte positivité de l'intégrale assure que, pour tout $t \in]T_-(0), T_+(0)[$, $R(t) > 0$.

■

2.1.4 Prolongement de la solution locale en solution globale

Théorème (Solution globale)

L'unique solution locale associée au problème de Cauchy (2.1) avec condition initiale $(S, I, R)(0) = (N - I_0 - V_0, I_0, V_0)$ définie sur $]T_-(0), T_+(0)[$ vérifie $T_+(0) = +\infty$.

Démonstration. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 . Supposons que $T_+(0) < +\infty$. Par le théorème d'explosion en temps fini, on a :

$$\lim_{t \rightarrow T_+(0)} \|(S, I, R)(t)\| = +\infty \quad (2.8)$$

Or, on a, pour tout $t \in [0, T_+(0)[$:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (2.9)$$

Donc, comme S, I et R sont positives sur $[0, T_+(0)[$ et que :

$$\lim_{\|(S, I, R)\| \rightarrow +\infty} = +\infty \quad (2.10)$$

On a ainsi :

$$N = \lim_{t \rightarrow T_+(0)} [S(t) + I(t) + R(t)] \quad (2.11)$$

$$= +\infty \quad (2.12)$$

ce qui est absurde, donc on a $T_+(0) = +\infty$, i.e. la solution est définie sur $[0, +\infty[$



2.2 Comportement de la solution

2.2.1 Portrait de phase

On va dresser le portrait de phase du système (2.1), en particulier nous allons étudier les trajectoires dans l'espace des phases (S, I) .

Définition (Croissance/décroissance de l'épidémie)

On dit que l'épidémie croît (resp. décroît) si et seulement si $\frac{dI}{dt} > 0$ (resp. $\frac{dI}{dt} < 0$)

Théorème (Croissance/décroissance de l'épidémie)

- ★ S est strictement décroissante dans tous les cas
- ★ Si $R_0 \leq 1$, alors l'épidémie régresse dès le début
- ★ Si $R_0 > 1$:
 - Si $S > \frac{N}{R_0}$, alors l'épidémie croît
 - Si $S < \frac{N}{R_0}$, alors l'épidémie décroît

Démonstration. ★ Dans tous les cas, on a:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{R_0 IS}{T_r N} \quad (2.13)$$

$$< 0 \quad (2.14)$$

Donc S est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

★ Si $R_0 \leq 1$, on a:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{T_r} I \left(\underbrace{R_0}_{\leq 1} \underbrace{\frac{S}{N}}_{< 1} - 1 \right) \quad (2.15)$$

$$< 0 \quad (2.16)$$

donc l'épidémie décroît.

★ Si $R_0 > 1$:

- Si $S > \frac{N}{R_0}$, alors:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{T_r} I \left(\frac{R_0}{N} \underbrace{S}_{> \frac{N}{R_0}} - 1 \right) \quad (2.17)$$

$$> 0 \quad (2.18)$$

donc l'épidémie croît.

- Si $S < \frac{N}{R_0}$, alors:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{T_r} I \left(\frac{R_0}{N} \underbrace{S}_{< \frac{N}{R_0}} - 1 \right) \quad (2.19)$$

$$> 0 \quad (2.20)$$

donc l'épidémie décroît.



Remarque. La stricte décroissance de S assure ainsi que I change de sens de variation au plus une fois (cf. portraits de phase ci-après).

On peut donc tracer l'allure du portrait de phase dans l'espace des phases (S, I) :

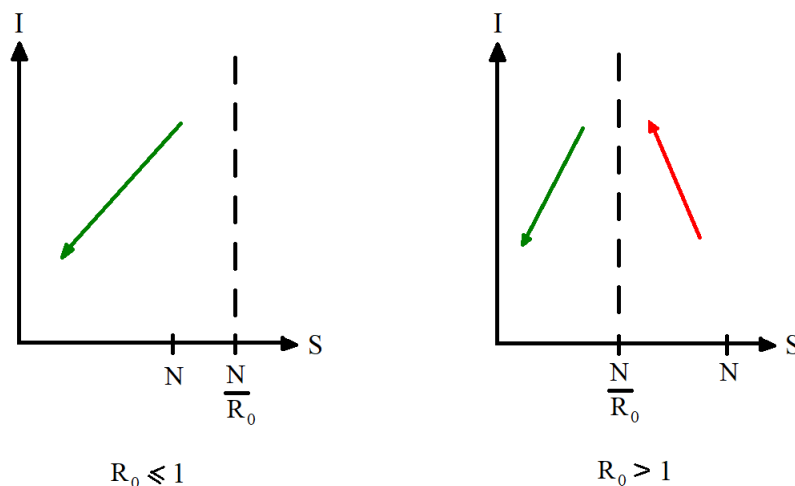


Figure 2.1: Allure du portrait de phase selon la valeur de R_0 . La flèche rouge signifie une croissance de l'épidémie, tandis que les flèches vertes signifient une décroissance de l'épidémie

2.2.2 Limites en $t \rightarrow +\infty$

Théorème (Limites en $+\infty$)

- S admet une limite en $+\infty$, notée S_∞
- I admet une limite nulle en $+\infty$
- R admet une limite en $+\infty$, notée R_∞
- S_∞ et R_∞ vérifient l'égalité $S_\infty + R_\infty = N$

Démonstration. - S est décroissante et vérifie: $0 \leq S \leq N$, elle est donc minorée et décroissante, donc, converge vers une limite, que l'on note S_∞ .

- De plus, I change de sens de variation au plus une fois, donc, pour t assez grand, I est monotone. De plus, $0 \leq I \leq N$, donc I est bornée et monotone, donc converge vers une limite que l'on note I_∞ . Si $I_\infty \neq 0$, alors, comme $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{T_r} I$, cela implique que:

$$R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{T_r} I_\infty t \quad (2.21)$$

Donc $|R(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui est absurde puisque $0 \leq R \leq N$. Donc $I_\infty = 0$

- Par conséquent, on a :

$$R(t) = N - I(t) - S(t) \quad (2.22)$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} N - S_\infty := R_\infty \quad (2.23)$$

■

2.2.3 Comportement de S et I lorsque $R_0 > 1$

Théorème (Comportement de S et I lorsque $R_0 > 1$)

Supposons que $S(0) > \frac{N}{R_0}$. Alors il existe un réel $t_1 \in]0, +\infty[$ tel que I est croissante sur $]0, t_1[$ et est décroissante sur $]t_1, +\infty[$. De plus, on a $S_\infty < \frac{N}{R_0}$

Démonstration. Si $S_\infty \geq \frac{N}{R_0}$, alors, comme S est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $S(t) > \frac{N}{R_0}$, donc, par le théorème de croissance/décroissance de l'épidémie, I est croissante sur $[0, +\infty[$. Or, $I_0 > 0$ et $I \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui est contradictoire.

On a ainsi $S_\infty < \frac{N}{R_0}$. S étant décroissante, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $t_1 \in]0, +\infty[$ tel que $S(t_1) = \frac{N}{R_0}$.

Ainsi, S décroît et tend vers une limite $S_\infty < \frac{N}{R_0}$, de plus :

- Tant que $t < t_1$, $S(t) > \frac{N}{R_0}$ et I croît, l'épidémie progresse.
- En $t = t_1$, $S(t) = \frac{N}{R_0}$ et $I'(t_1) = 0$.
- Lorsque $t > t_1$, $S(t) < \frac{N}{R_0}$ et I décroît, l'épidémie régresse.

■

2.2.4 Etude des points d'équilibre

Le système différentiel (2.1) étant un système autonome, il est intéressant d'étudier ses points d'équilibre.

Théorème (Points d'équilibre)

Les points d'équilibre du système (2.1) tels que $S, I, R \in [0, N]$ sont les points $\{(\alpha, 0, N - \alpha)\}_{\alpha \in [0, N]}$.

- Si $R_0 \leq 1$, tous les points d'équilibre sont stables
- Si $R_0 > 1$ et $\alpha \leq \frac{N}{R_0}$, alors le point d'équilibre $(\alpha, 0, N - \alpha)$ est stable, si $\alpha > \frac{N}{R_0}$, ce point est instable.

Démonstration. ★ Étudions les points d'équilibre. Notons $X = (S, I, R)$ et f l'application définie par:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto \frac{1}{T_r N} (-R_0 I S, I(R_0 S - N), N I) \end{aligned}$$

Le système différentiel (2.1) se réécrit $X' = f(X)$, et on a:

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} I S & = 0 \\ I(R_0 S - N) & = 0 \\ I & = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow I = 0 \quad (2.25)$$

Donc les points d'équilibre tels que $S, I, R \in [0, N]$ sont donnés, pour tout $\alpha \in [0, N]$ par:

$$(S, I, R) = (\alpha, 0, N - \alpha) \quad (2.26)$$

★ Étudions la stabilité de ces points d'équilibre. f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 , donc est différentiable, et sa différentielle est donnée, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, par:

$$d_X f(X) = \frac{1}{T_r N} \begin{bmatrix} -R_0 I & -R_0 S & 0 \\ R_0 I & R_0 S - N & 0 \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Évaluons cette différentielle en les points d'équilibre $X = (\alpha, 0, N - \alpha)$:

$$d_X f(\alpha, 0, N - \alpha) = \frac{1}{T_r N} \begin{bmatrix} 0 & -R_0 \alpha & 0 \\ 0 & R_0 \alpha - N & 0 \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)$ est donné par:

$$\det(\lambda I_3 - d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)) = \left(\frac{1}{T_r N} \right)^3 \begin{vmatrix} \lambda & R_0 \alpha & 0 \\ 0 & \lambda + N - R_0 \alpha & 0 \\ 0 & -N & \lambda \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Faisons un développement par rapport à la première colonne:

$$\det(\lambda I_3 - d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)) = \left(\frac{1}{T_r N} \right)^3 \lambda \begin{vmatrix} \lambda + N - R_0 \alpha & 0 \\ -N & \lambda \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

On obtient finalement:

$$\det(\lambda I_3 - d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)) = \left(\frac{1}{T_r N}\right)^3 \lambda^2 (\lambda + N - R_0 \alpha) \quad (2.31)$$

Les trois racines de ce polynôme, qui correspondent aux trois valeurs propres de $d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)$, sont 0 (double) et $R_0 \alpha - N$ (si $\alpha = \frac{N}{R_0}$, 0 est valeur propre triple).

- Si $R_0 \leq 1$, alors $\alpha \leq N \leq \frac{N}{R_0}$, donc $R_0 \alpha - N \leq 0$. Toutes les valeurs propres de $d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)$ sont négatives. Par le théorème de stabilité en première approximation, tous les points d'équilibre $(\alpha, 0, N - \alpha)$, avec $\alpha \in [0, N]$, sont stables.
- Si $R_0 > 1$, ces deux cas de figure se présentent:
 - > Si $\alpha \leq \frac{N}{R_0}$, alors $R_0 \alpha - N \leq 0$, toutes les valeurs propres de $d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)$ sont négatives, ainsi, en vertu du théorème de stabilité en première approximation, les points d'équilibre $(\alpha, 0, N - \alpha)$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{N}{R_0}\right]$ sont stables.
 - > Si $\alpha > \frac{N}{R_0}$, alors $R_0 \alpha - N > 0$, au moins une valeur propre de $d_X f(\alpha, 0, N - \alpha)$ est positive, ainsi, en vertu du théorème de stabilité en première approximation, les points d'équilibre $(\alpha, 0, N - \alpha)$ avec $\alpha \in \left]\frac{N}{R_0}, N\right]$ sont instables.

■

Remarque. La stabilité des points d'équilibre s'explique bien, en effet, dans le cas où $R_0 \leq 1$, il n'y a pas d'augmentation d'infection, et l'épidémie d'éteint d'elle-même, tandis que dans le cas où $R_0 > 1$, tant que $S > \frac{N}{R_0}$, les infections augmentent, c'est ce qui, mathématiquement, génère de l'instabilité, tandis que lorsque $S \leq \frac{N}{R_0}$, les infections diminuent. Ce phénomène peut s'illustrer sur les portraits de phases (cf. ci-après)

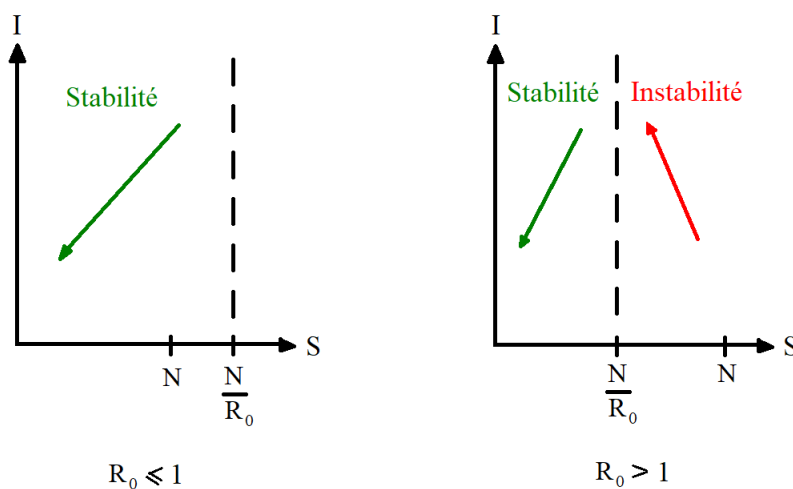


Figure 2.2: Allure du portrait de phase selon la valeur de R_0 , complété avec les zones de stabilité et d'instabilité

2.3 Immunité collective

Intéressons-nous au cas où $R_0 > 1$. Une application intéressante de ce modèle est le calcul du taux d'immunité collective, autrement dit, du nombre d'individus R à partir duquel l'épidémie régresse.

Théorème (Seuil d'immunité collective)

Dans le cas où $R_0 > 1$, le taux d'immunité collective est de $\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N$, autrement dit, l'épidémie ne croît plus lorsque une fraction de la population égale à $1 - \frac{1}{R_0}$ est immunisée.

Démonstration. On sait que, dans le cas où $R_0 > 1$, que si $S < \frac{N}{R_0}$, alors l'épidémie régresse. Ainsi, si $R > \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N$, alors on a :

$$S = N - R - I \quad (2.32)$$

$$\leq N - R \quad (2.33)$$

$$< N - \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N \quad (2.34)$$

$$< \frac{N}{R_0} \quad (2.35)$$

Ainsi, il s'agit bien là d'une condition suffisante afin que l'épidémie soit en décroissance. ■

Remarque. Il est également possible d'immuniser une partie de la population, par vaccination par exemple. Si V_0 désigne le taux de vaccination, alors, avec $V_0 > \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N$, on a, comme R est croissante (par positivité de I), $R > \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N$. Ainsi, une couverture vaccinale suffisante permet de contenir une épidémie (selon le modèle SIR)

Partie 3

Résolution numérique d'équations différentielles

On s'intéresse à la résolution numérique d'équations différentielles autonomes de la forme:

$$y' = f(y) \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , avec pour condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe une unique solution à cette équation sur un intervalle $[0, T]$ où $T > 0$. Nous allons étudier deux méthodes numériques

Remarque. La solution y est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T]$. En effet, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $y \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^d)$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 et y est continue, y' est continue, donc y est de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, l'équation assure que y' est de classe \mathcal{C}^1 , donc que y est de classe \mathcal{C}^2 .

L'objectif de la résolution numérique de l'équation différentielle (3.1) est d'approcher la solution aux temps $t_n = nh$, où $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ N étant le nombre de discrétisations de l'intervalle de résolution, $h = \frac{T}{N}$ est le pas de discrétisation, t_0, \dots, t_N étant une discrétisation de l'intervalle de résolution $[0, T]$. Autrement dit, on cherche une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ approchant $(y(t_n))_{0 \leq n \leq N}$

3.1 Lemme de Grönwall discret

Avant d'étudier les méthodes numériques, nous allons étudier lemme de Grönwall discret, qui sera utilisé par la suite

Lemme (Lemme de Grönwall discret)

Soient $\lambda, h > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \leq (1 + hL)u_n + v_n \quad (3.2)$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$u_n \leq e^{nh\lambda}u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda(n-j-1)h}v_j \quad (3.3)$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence

- **Initialisation:** Au rang $n = 1$, on a:

$$u_1 \leq (1 + \lambda h)u_0 + v_0 \quad (3.4)$$

Or, l'inégalité de convexité sur l'exponentielle assure que:

$$1 + \lambda h \leq e^\lambda \quad (3.5)$$

Donc:

$$u_1 \leq e^{\lambda h}u_0 + v_0 \quad (3.6)$$

- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons l'inégalité (3.3) vraie au rang n et montrons-là au rang $n + 1$. par hypothèse, on a:

$$u_{n+1} \leq (1 + \lambda h)u_n + v_n \quad (3.7)$$

$$\leq e^{\lambda h}u_n + v_n \quad (3.8)$$

Par hypothèse de récurrence (inégalité (3.3)), on a:

$$u_{n+1} \leq e^\lambda \left[e^{nh\lambda} u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda(n-j-1)h} v_j \right] + v_n \quad (3.9)$$

$$\leq e^{(n+1)\lambda h} u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda(n-j)h} v_j + v_n \quad (3.10)$$

$$\leq e^{(n+1)\lambda h} u_0 + \sum_{j=0}^n e^{\lambda(n-j)h} v_j \quad (3.11)$$

$$\leq e^{(n+1)\lambda h} u_0 + \sum_{j=0}^n e^{\lambda(n+1-j-1)h} v_j \quad (3.12)$$

ce qui montre l'hérédité. ■

3.2 Méthodes numériques

3.2.1 Méthode d'Euler Explicite

Définition (Méthode d'Euler Explicite)

La méthode d'Euler Explicite consiste à définir la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} y_0 &= y(0) \\ \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, & y_{n+1} = y_n + hf(y_n) \end{cases}$$

Théorème (Ordre de convergence de la méthode d'Euler Explicite)

Ils existent deux réels $M, L > 0$ tels que:

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq \frac{M}{L} (e^{LT} - 1) h \quad (3.13)$$

On dit que la méthode d'Euler Explicite est d'ordre 1

Démonstration. - *Erreur de consistance:* Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Soit y la solution de l'équation différentielle (3.1). L'erreur de consistance est donnée par:

$$\varepsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(y(t_n)) \quad (3.14)$$

On a donc:

$$\varepsilon_n = y(t_n + h) - y(t_n) - hf(y(t_n)) \quad (3.15)$$

Par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $\tau_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que:

$$\varepsilon_n = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\tau_n) - y(t_n) - hf(y(t_n)) \quad (3.16)$$

$$= \frac{h^2}{2}y''(\tau_n) \quad (3.17)$$

On a donc:

$$|\varepsilon_n| \leq Mh^2 \quad (3.18)$$

avec M donné par:

$$M := \frac{1}{2} \|y''\|_{L^\infty([0, T])} \quad (3.19)$$

- **Erreur locale puis globale:** Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit l'erreur locale par:

$$e_n := y_n - y(t_n) \quad (3.20)$$

(on note que $e_0 = y_n - y(0) = 0$) Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(t_{n+1}) \quad (3.21)$$

$$= y_n + hf(y_n) - y(t_n) - hf(y(t_n)) - \varepsilon_n \quad (3.22)$$

$$= \underbrace{y_n - y(t_n)}_{=e_n} + h[f(y_n) - f(y(t_n))] - \varepsilon_n \quad (3.23)$$

Ainsi, on a:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h|f(y_n) - f(y(t_n))| + |\varepsilon_n| \quad (3.24)$$

Or, f est de classe \mathcal{C}^1 , donc est localement lipschitzienne. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $y_n, y(t_n) \in \Omega$. On pose:

$$L := \|df\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.25)$$

On a donc:

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hL)|e_n| + |\varepsilon_n| \quad (3.26)$$

Par le lemme de Grönwall discret, on a, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$|e_n| \leq e^{nhL} \underbrace{|e_0|}_{=0} + \sum_{j=0}^{n-1} e^{L(n-j-1)h} \underbrace{|\varepsilon_j|}_{\leq Mh^2} \quad (3.27)$$

$$\leq e^{-Lh} e^{NLh} Mh^2 \sum_{j=0}^{N-1} e^{-jLh} \quad (3.28)$$

$$\leq e^{-Lh} e^{NLh} Mh^2 \frac{e^{-NLh} - 1}{e^{-Lh} - 1} \quad (3.29)$$

$$\leq Mh^2 \frac{1 - e^{NLh}}{1 - e^{Lh}} \quad (3.30)$$

$$\leq e^{-Lh} e^{NLh} Mh^2 \frac{e^{\overbrace{NLh}^=T} - 1}{e^{Lh} - 1} \quad (3.31)$$

$$\leq Mh^2 \frac{e^{LT} - 1}{e^{Lh} - 1} \quad (3.32)$$

Or, $e^{Lh} - 1 \geq Lh$ donc $\frac{1}{e^{Lh} - 1} \leq \frac{1}{Lh}$, soit:

$$|e_n| \leq \frac{M}{L} (e^{LT} - 1) h \quad (3.33)$$

Donc, l'erreur globale $\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |e_n|$ vérifie:

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq \frac{M}{L} (e^{LT} - 1) h \quad (3.34)$$

■

3.2.2 Méthode de Runge-Kutta 2 (RK2)

On suppose de plus, que dans l'équation différentielle (3.1), la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 .

Remarque. La solution y est donc de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, T]$. En effet, étant de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T]$, et f étant de classe \mathcal{C}^2 , l'équation (3.1) assure que y' est également de classe \mathcal{C}^2 , i.e. y est de classe \mathcal{C}^3 .

Définition (Méthode de Runge-Kutta 2)

La méthode RK2 consiste à définir la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} y_0 &= y(0) \\ \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, & y_{n+1} = y_n + hf(y_n + \frac{h}{2}f(y_n)) \end{cases}$$

Théorème (Ordre de convergence de la méthode de Runge-Kutta 2)

Ils existent deux réels $M, Q > 0$ tels que:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq \frac{M}{Q} (e^{QT} - 1) h^2 \quad (3.35)$$

On dit que la méthode RK2 est d'ordre 2

Démonstration. - Erreur de consistance: Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. Soit y la solution de l'équation différentielle (3.1). L'erreur de consistance est donnée par:

$$\varepsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \right) \quad (3.36)$$

On a donc:

$$\varepsilon_n = y(t_n + h) - y(t_n) - hf \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \right) \quad (3.37)$$

On fait un développement de Taylor à l'ordre 3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \mathcal{O}(h^3) \\ &- y(t_n) - hf(y(t_n)) - \frac{h^2}{2} df(y(t_n)f(y(t_n))) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (3.38)$$

On a donc:

$$|\varepsilon_n| \leq Mh^3 \quad (3.39)$$

pour une certaine constante $M > 0$.

- **Erreur locale puis globale:** Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit l'erreur locale par:

$$e_n := y_n - y(t_n) \quad (3.40)$$

(on note que $e_0 = y_n - y(0) = 0$) Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(t_{n+1}) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &= y_n + hf \left(y_n + \frac{h}{2} f(y_n) \right) \\ &- y(t_n) - hf \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \right) - \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{y_n - y(t_n)}_{=e_n} \\ &+ h \left[f \left(y_n + \frac{h}{2} f(y_n) \right) - f \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \right) \right] - \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ainsi, on a:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h \left| f \left(y_n + \frac{h}{2} f(y_n) \right) - f \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \right) \right| + |\varepsilon_n| \quad (3.44)$$

Or, f est de classe \mathcal{C}^2 , donc est localement lipschitzienne. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $y_n, y(t_n), y_n + \frac{h}{2} f(y_n), y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \in \Omega$. On pose:

$$L := \|df\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.45)$$

Ainsi, on a:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hL \left| \underbrace{y_n - y(t_n)}_{=e_n} + \frac{h}{2} (f(y_n) - f(y(t_n))) \right| + |\varepsilon_n| \quad (3.46)$$

$$\leq |e_n| + hL |e_n| + \frac{h^2}{2} L^2 \underbrace{|y_n - y(t_n)|}_{=|e_n|} + |\varepsilon_n| \quad (3.47)$$

On a donc:

$$|e_{n+1}| \leq \left(1 + hL + \frac{h^2 L^2}{2} \right) |e_n| + |\varepsilon_n| \quad (3.48)$$

$$\leq \left(1 + hL + \frac{hTL^2}{2} \right) |e_n| + |\varepsilon_n| \quad (3.49)$$

$$\leq \left[1 + h \left(L + \frac{TL^2}{2} \right) \right] |e_n| + |\varepsilon_n| \quad (3.50)$$

En posant $Q = L + \frac{TL^2}{2}$, on a:

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hQ) |e_n| + |\varepsilon_n| \quad (3.51)$$

Par le lemme de Grönwall discret, on a, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$|e_n| \leq e^{nhL} \underbrace{|e_0|}_{=0} + \sum_{j=0}^{n-1} e^{Q(n-j-1)h} \underbrace{|\varepsilon_j|}_{\leq Mh^2} \quad (3.52)$$

$$\leq e^{-Qh} e^{NQh} Mh^2 \sum_{j=0}^{N-1} e^{-jQh} \quad (3.53)$$

$$\leq e^{-Qh} e^{NQh} Mh^2 \frac{e^{-NQh} - 1}{e^{-Qh} - 1} \quad (3.54)$$

$$\leq Mh^2 \frac{1 - e^{NQh}}{1 - e^{Qh}} \quad (3.55)$$

$$\leq e^{-Qh} e^{NQh} Mh^2 \frac{e^{\overbrace{NQ}^T} - 1}{e^{Qh} - 1} \quad (3.56)$$

$$\leq Mh^2 \frac{e^{QT} - 1}{e^{Qh} - 1} \quad (3.57)$$

Or, $e^{Qh} - 1 \geq Qh$ donc $\frac{1}{e^{Qh}-1} \leq \frac{1}{Qh}$, soit:

$$|e_n| \leq \frac{M}{Q} (e^{QT} - 1) h \quad (3.58)$$

Donc, l'erreur globale $\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |e_n|$ vérifie:

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq \frac{M}{Q} (e^{QT} - 1) h^2 \quad (3.59)$$

■

Partie 4

Annexe: Simulations numériques

Des simulations numériques ont été réalisées à l'aide du logiciel Scilab, et permettent d'illustrer ce qui a été étudié en théorie.

4.1 Choix des paramètres

Voici les paramètres choisis pour réaliser nos simulations numériques:

```
// Etude du modèle SIR et de méthodes numériques pour les équations
différentielles

// Paramètres scientifiques

R0 = 3           // Taux de reproduction de base du virus
Tr = 10          // Temps de rétablissement (en jours)
N = 100000       // Nombre d'individus
t_immu = 0.1     // Taux d'immunité initiale: Proportion d'individus
initialement immunisés au début de la simulation
IO = 3           // Nombre d'individus malades au début de la simulation

// Paramètres mathématiques

T = 150          // Durée de la simulation (en jours)
h = 5            // Pas de temps pour l'intégration numérique
```

4.2 Calcul des solutions exactes

Avec l'intégrateur d'équations différentielles `ode` de Scilab, il est possible de calculer la solution (presque) exacte d'une équation différentielle de la forme $y' = F(t, y)$.

Avec les paramètres sélectionnés, voici l'évolution de S , I et R en fonction du temps:

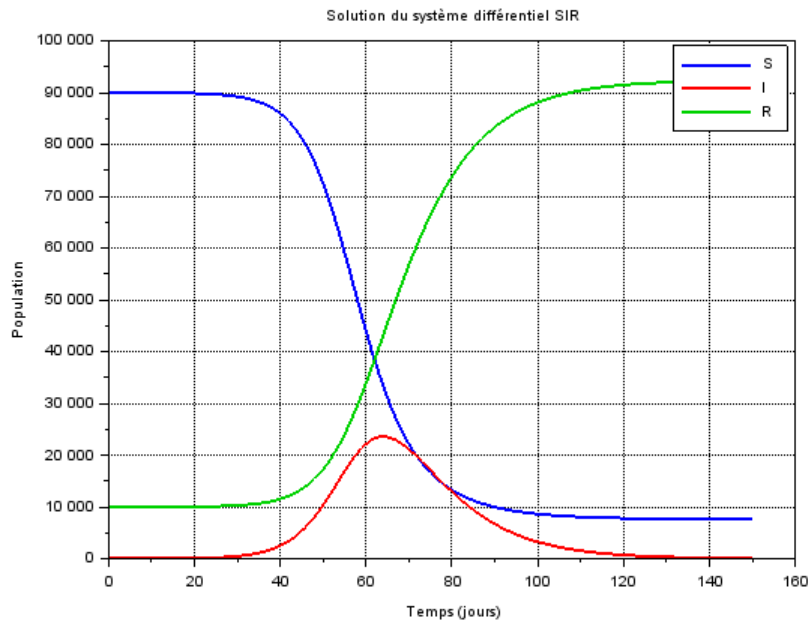


Figure 4.1: Simulation montrant l'évolution de (S, I, R) au cours du temps à l'aide de l'intégrateur de Scilab, donnant une très bonne approximation de la solution exacte.

Il est également possible de tracer le portrait de phase (S, I) afin d'étudier la trajectoire de la solution:

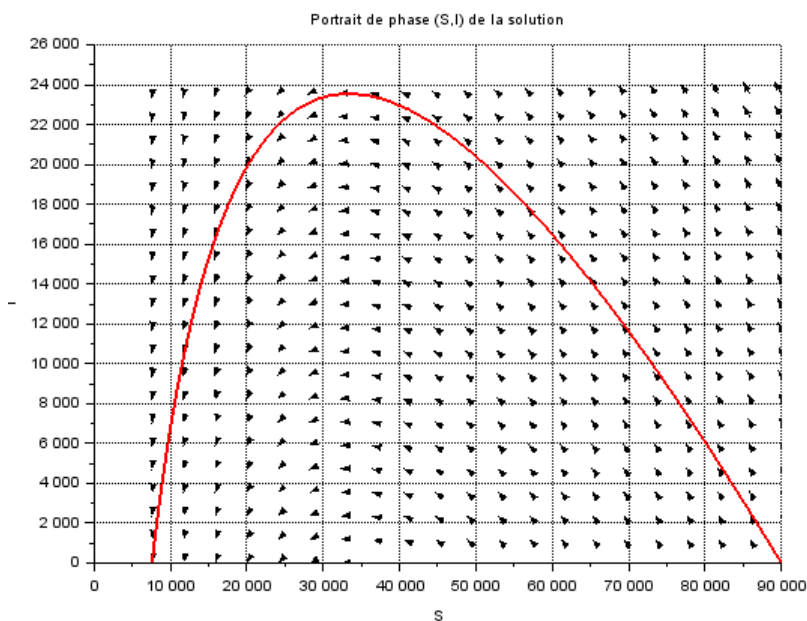


Figure 4.2: Simulation montrant l'évolution de la trajectoire (S, I) au cours du temps. Les flèches donnent l'évolution de la trajectoire.

4.3 Choix de la méthode d'intégration d'une équation différentielle

4.3.1 Intégration d'une équation différentielle

Nous allons représenter les différentes solutions intégrées avec l'intégrateur (proche de la solution exacte), la méthode d'Euler explicite et la méthode de Runge-Kutta 2.

Le fait que la méthode d'Euler converge moins rapidement que la méthode de Runge-Kutta 2 est ici mis en évidence.

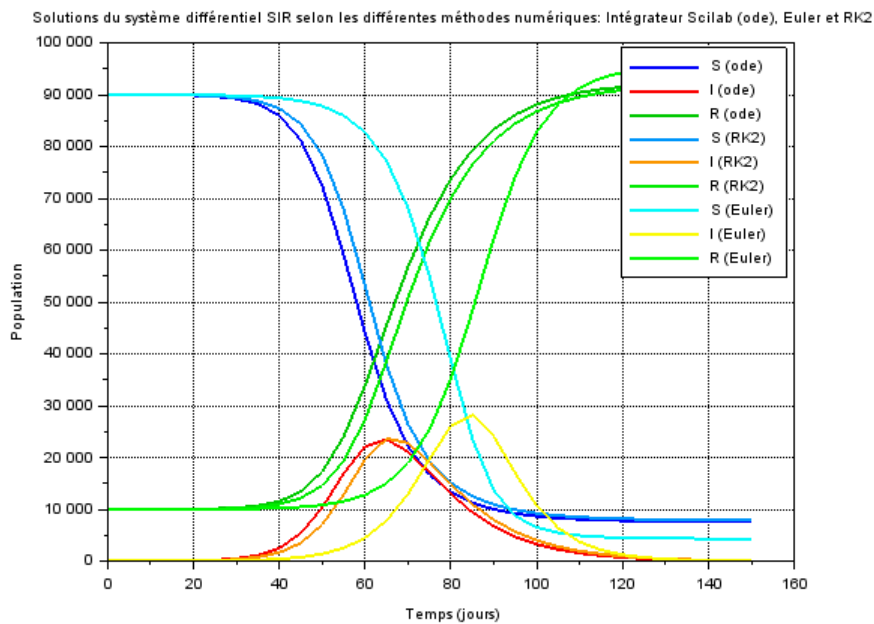


Figure 4.3: Simulation montrant l'évolution de la trajectoire (S, I) au cours du temps selon la méthode utilisée. On remarque clairement que la solution approchée donnée par la méthode d'Euler est moins précise que celle donnée par la méthode RK2

4.3.2 Ordre de convergence

L'ordre de convergence d'une méthode numérique peut-être mis en évidence via des "mesures" d'erreurs globales. Ainsi, si l'erreur globale e d'une méthode numérique vérifie, pour un certain α :

$$e(h) \leq Ch^\alpha \quad (4.1)$$

où $C > 0$ est une constante, et α est l'ordre de la méthode numérique (pour Euler, $\alpha = 1$ alors que $\alpha = 2$ pour RK2).

En appliquant le logarithme, on a:

$$\log(e(h)) \leq \alpha \log(h) + \log(C) \quad (4.2)$$

En mesurant $e(h)$ pour différents pas de temps h sur une équation donnée, puis en traçant les points $(h, e(h))$ en échelle logarithmique sur les deux axes, une droite apparaît. La pente de cette droite donne l'ordre de la méthode numérique.

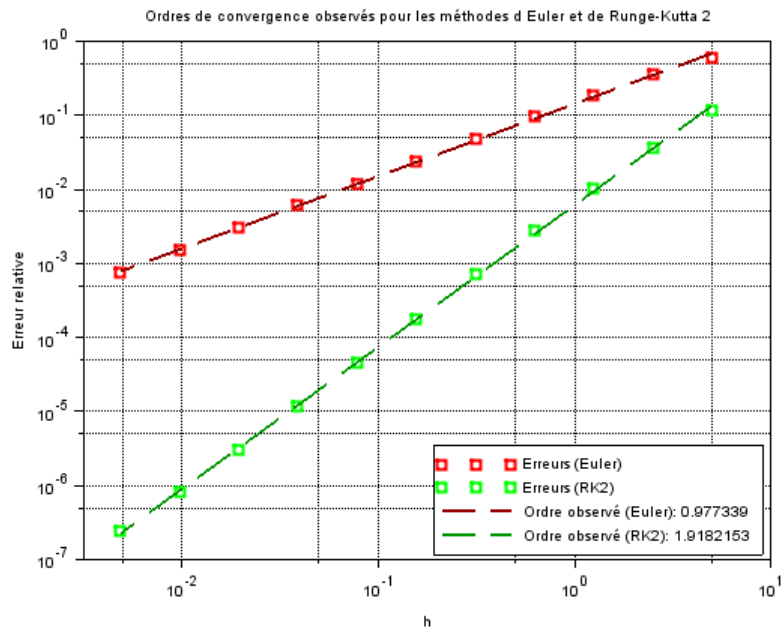


Figure 4.4: Mesures d'erreurs globales pour les méthodes d'Euler et RK2, la solution fournie par l'intégrateur étant prise comme solution exacte. Les pas h sont $\{\frac{5}{2^i}, 0 \leq i \leq 10\}$. On observe bien les ordre 1 pour la méthode d'Euler et 2 pour la méthode RK2. Ici, l'erreur considérée est l'erreur relative, i.e. $\frac{e(h)}{N}$, et ce afin d'obtenir une erreur relative et d'avoir des valeurs normalisées qui varient peu en changeant N

Références bibliographiques

- [1] Wikipedia. Compartmental models in epidemiology, 2022.