Cinq points définissant une conique

Leçons 162,171

Théorème (Cinq points définissant une conique)

1. Par cinq points distincts A, B, C, D et E d'un plan affine $\mathcal{P}$ passe une conique $\mathcal{C}$.
2. Elle est unique si et seulement si quatre points quelconques parmi ces cinq sont non-alignés.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le premier point en utilisant les coordonnées barycentriques pour un repère affine $\{A, B, C\}$, et un système linéaire à partir de l'équation de la conique.
2. Montrer le second point en étudiant les conditions sur e rang du système linéaire et les mineurs.

Démonstration. *1. Si les cinq points sont alignés, une conique constituée d'une droite passant par A, B, C, D, E et une autre droite convient.*

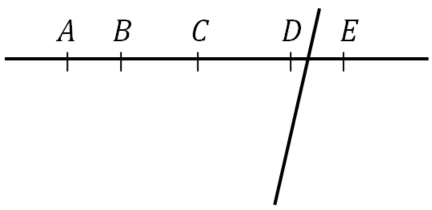

Figure 1: Illustration du cas où cinq points sont alignés.

Si au moins trois points sont non alignés, quitte à les réordonner, on peut supposer que A, B, C sont non alignés. $\{A, B, C\}$ forme une base affine de $\mathcal{P}$. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on note (X, Y, Z) ses coordonnées barycentriques, avec $X + Y + Z = 1$. On a alors $X\overrightarrow{AM} + Y\overrightarrow{BM} + Z\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

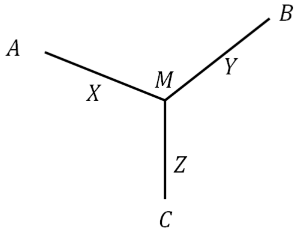

Figure 2: Illustration de l'égalité vectorielle ci-dessus

L'équation de $\mathcal{C}$ est e la forme $aX^2+bY^2+cZ^2+pYZ+qXZ+rXY=0$, et on a $A,B,C\in\mathcal{C}$ donc, comme les coordonnées barycentriques de A,B,C sont respectivement $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, on obtient $a=b=c=0$, d'où $pYZ+qXZ+rXY=0$.

On note (x_D,y_D,z_D) et (x_E,y_E,z_E) les coordonnées barycentriques de D et E. $\mathcal{C}$ passe par D et E si et seulement si le système linéaire $[S]$ est vérifié:

$$[S]:\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} py_Dz_D & + & qx_Dz_D & + & rx_Dy_D & = & 0\\ py_Ez_E & + & qx_Ez_E & + & rx_Ey_E & = & 0\end{array}\right.$$

Ce système linéaire est de rang inférieur à 2, donc, en vertu du théorème du rang, il existe toujours une solution $(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$ (au moins une droite vectorielle), donc l'existence de la conique $\mathcal{C}$ passant par A,B,C,D,E est assurée.

2. *On raisonne dans les deux cas par contraposée:*

   $\star$ $\Rightarrow$ *Si on n'a pas une unique conique, alors ceci équivaut au fait que le rang de $[S]$ est strictement inférieur à 2 (sinon, on a une solution $(p,q,r)\in\mathbb{R}\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3$, et $pXY+qXZ+rXY=0$ est l'équation de la même conique). Dans ce cas, tous les mineurs de taille 2×2 sont nuls:*

$$\begin{vmatrix} x_Dy_D & x_Dz_D\\ x_Ey_E & x_Ez_E\end{vmatrix} = x_Dx_E\begin{vmatrix} y_D & z_D\\ y_E & z_E\end{vmatrix} = x_Dx_E\begin{vmatrix} 1 & x_D & x_E\\ 0 & y_D & y_E\\ 0 & z_D & z_E\end{vmatrix}=0$$

$$\text{De même,}\quad \begin{vmatrix} y_Dz_D & x_Dy_D\\ y_Ez_E & x_Ey_E\end{vmatrix} = y_Dy_E\begin{vmatrix} 0 & x_D & x_E\\ 1 & y_D & y_E\\ 0 & z_D & z_E\end{vmatrix}=0$$

$$\text{et}\quad \begin{vmatrix} y_Dz_D & x_Dz_D\\ y_Ez_E & x_Ez_E\end{vmatrix} = z_Dz_E\begin{vmatrix} 0 & x_D & x_E\\ 0 & y_D & y_E\\ 1 & z_D & z_E\end{vmatrix}$$

   - *Si D et E ne sont sur aucune des droites (AB), (BC) ou (CA), alors on a $x_D,y_D,z_D,x_E,y_E,z_E\neq 0$, et on a ainsi:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_D & x_E\\ 0 & y_D & y_E\\ \underbrace{0}_{A} & \underbrace{z_D}_{D} & \underbrace{z_E}_{E}\end{vmatrix}=0$$

     donc A,D,E sont alignés.
     De même, en raisonnant avec les autres mineurs, on montre que B,D,E et C,D,E sont alignés, donc $A,B,C\in(DE)$, i.e. sont alignés, ce qui est impossible puisque $\{A,B,C\}$ est une base affine de $\mathcal{P}$.

   - *On a donc par exemple $D\in(AB)$, donc $z_D=0$, $x_Dy_D\neq 0$. Ainsi, en observant le premier et le deuxième mineur, on obtient $x_Dy_Dx_Ez_E=x_Dy_Dy_Ez_E=0$, donc, puisque $x_Dz_D\neq 0$, on a:*

$$\left\{\begin{array}{lll} x_E = 0 & ou & z_E = 0 \\ y_E = 0 & ou & z_E = 0 \end{array}\right. \quad avec \quad x_E + y_E + z_E = 1$$

→ *Si* $x_E = 0$ *et* $z_E \neq 0$*, alors* $y_E = 0$*, alors* $y_E = 0$ *et* $E = C$*, absurde car les points sont distincts.*

→ *Si* $x_E = 0$ *et* $z_E = 0$*, alors* $y_E = 1$ *et on a* $E = B$*, absurde car les points sont distincts.*

→ *Il reste l'option* $x_E \neq 0$*, donc* $z_E = 0$ *et on a bien* $E \in (AB)$*, donc* A, B, D, E *sont quatre points alignés.*

Par contraposition, si quatre points quelconques sont non alignés, alors on a une unique conique.

⋆ $\Rightarrow$ *Réciproquement, si quatre points quelconques sont alignés, alors, en supposant que* A, B, D, E *sont alignés (quitte à les réordonner), on a bien une infinité de coniques.*

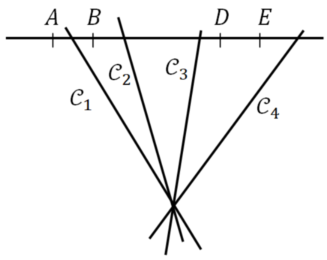

Figure 3: Illustration du cas où A, B, D, E sont alignés.

■