Décomposition polaire

Leçons 150,203

Théorème (Décomposition polaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application suivante est un homéomorphisme:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & GL_n(\mathbb{R}) \\ & (S, Q) & \longmapsto & SQ \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_n^{++}$ caractérise les orbites de l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$ par translation à droite.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer la bijection d'un point de vue algébrique en utilisant le théorème spectral sur AA^T où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer la continuité de ϕ et surtout de ϕ^{-1} en utilisant la compacité du groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Démonstration. *1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Considérons la matrice AA^T et montrons que $AA^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En effet, on a bien: $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ donc AA^T est symétrique. De plus, soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a:*

$$\langle X | AA^T X \rangle = \langle A^T X | A^T X \rangle = \left\| A^T X \right\|^2$$

.

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $A^T \in GL_n(\mathbb{R})$ ($(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$) et $A^T X \neq 0$ donc $\langle X | AA^T X \rangle = \left\| A^T X \right\|^2 > 0$, d'où $AA^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Posons alors $\Delta = AA^T$.

En vertu du théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$P \Delta P^T = D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Posons alors:

$$\Gamma = \sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

et posons $S = P^T \Gamma P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On obtient ainsi $S^2 = P^T D P = \Delta = AA^T$.

Posons maintenant $Q = S^{-1} A$ et montrons que $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} QQ^T &= S^{-1}A(S^{-1}A)^T \\ &= S^{-1}AA^T(S^{-1})^T \\ &\overset{S^T=S}{=} S^{-1}AA^TS^{-1} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Cela montre la surjectivité de ϕ

Supposons que $(S,Q),(S',Q') \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifient la décomposition polaire. On a alors $S^2 = AA^T = S'^2$. De plus, on sait que Γ est un polynôme en D (on peut le constater un utilisant un polynôme interpolateur de Lagrange $Z \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt{\lambda_i} = Z(\lambda_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ donc au aura $S = Z(S^2) = Z(S'^2)$) donc S est un polynôme en S'^2 commute avec S'. Ainsi, ces deux matrices sont co-diagonalisables, donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que:

$$PSP^T = \begin{bmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{bmatrix}$$

et:

$$PS'P^T = \begin{bmatrix} \mu'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu'_n \end{bmatrix}$$

Comme $S^2 = S'^2$, on a: $\forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i^2 = \mu_i'^2$, et comme $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\mu_i = \mu'_i$, donc $S = S'$, et ainsi, $Q = Q'$, donc ϕ est injective, donc bijective.

2. *Montrons que ϕ est un homéomorphisme. ϕ est continue par continuité du produit matriciel. Montrons que ϕ^{-1} est continue. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Soit $(S_k, Q_k) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ la décomposition polaire de A_k et soit $(S,Q) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ la décomposition polaire de A. Montrons que $(S_k, Q_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (S,Q)$.*

   Par compacité du groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(Q_{\varphi(k)})_k$ soit convergente, de limite $Q' \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Alors $S_{\varphi(k)} = A_{\varphi(k)}Q_{\varphi(k)}^T \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AQ'^T$.

   $Q_{\varphi(k)} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $S' := AQ'^T \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Comme $A, Q'^T \in GL_n(\mathbb{R})$ qui est un groupe, on a bien $S' = AQ'^T$ inversible, i.e. $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   Donc $A = SQ = S'Q'$. Par unicité de la décomposition polaire, on a bien $(S,Q) = (S',Q')$ donc Q est la seule valeur d'adhérence de $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donc $Q_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q$. De *plus,* $S_k = A_k Q_k^T \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AQ^T = S$. *Donc* $(S_k, Q_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (S,Q)$ *donc* φ^{-1} *est continue*

■

Remarque. *D'un point de vue action de groupe, si on a l'action de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *sur* $GL_n(\mathbb{R})$ *par translation à droite, alors, si* $M \in GL_n(\mathbb{R})$*, il existe un unique couple* $(Q,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *tel que* $M = SQ$*. Donc* $M \in \mathcal{O}_S$ *(orbite de* S*) et réciproquement.*

Application (Norme subordonnée à la norme euclidienne)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On rappelle que: $|||A|||_2 = \sup\limits_{||X||_2=1} ||AX||_2$. On a alors cette égalité: $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(AA^T)}$

Démonstration. *Soit* $(S,Q) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\times\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *la décomposition polaire de* A *(*$A = SQ$*).*

$$\begin{aligned}
\sup_{||X||_2=1} ||AX||_2 &= \sup_{||X||_2=1} ||SQX||_2 \\
&\overset{Y=QX}{=} \sup_{||Y||_2=1} ||SY||_2 \\
&\overset{\text{Théorème spectral}}{=} \sup_{||Y||_2=1, j\in[\![1,n]\!]} |\lambda_j y_j| \\
&= \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |\lambda_j| \\
&= \rho(S)
\end{aligned}$$

où $\sigma(S) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *(*σ *désigne le spectre). Or* $\rho(S)^2 = \rho(S^2) = \rho(AA^T)$ *donc* $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(AA^T)}$.

■

Remarques.

1. *Lorsque ce développement est utilisé pour la leçon 203 sur la compacité, c'est bien de montrer la compacité du groupe orthogonal (cf. simplicité de* $SO_3(\mathbb{R})$*), et de passer plus vite sur la première partie de la démonstration du théorème.*
2. *On a les analogies suivantes:*

Propriété	*Version complexe*	*Version matricielle*
Homéomorphisme	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$	$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Surjection continue	$\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$	$\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$
Homéomorphisme de forme/décomposition polaire	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \longmapsto & re^{i\theta} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (S,\Omega) & \longmapsto & S\Omega \end{array}$

Reférence(s). *P.Caldero, J.Germoni, Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries*