Calcul de deux déterminants classiques: Vandermonde et Cauchy

Abandonné

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul, $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et on pose $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ avec, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$.

Définition (Déterminants de Vandermonde et de Cauchy)

On définit les **déterminants de Vandermonde et de Cauchy** respectivement par:

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \det \left[x_j^{i-1}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ et } C(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) = \det \left[\frac{1}{a_i + b_j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Théorème (Calcul du déterminant de Vandemonde)

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. On a alors:

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$$

Démonstration. *Montrons pour $n \geqslant 2$ la formule du déterminant de Vandermonde par récurrence sur n.*

⋆ *Initialisation: On a, pour $n = 2$:*

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

⋆ *Hérédité: Soit $n \geqslant 2$ fixé. Notre hypothèse de récurrence est:*

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Montrons la formule au rang $n + 1$. Soit $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^2$.

$$V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n & x \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré n en x. Il existe donc $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que:

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Le polynôme $V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X)$ a n racines, qui sont $x_1, \dots, x_n$. En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_j) = 0$ puisqu'il y a deux colonnes identiques. Donc on a:

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) \quad = \quad a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$\textit{ainsi que: } a_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n(x_1, \dots, x_n)$$

En effet, en développant le déterminant $V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x)$ par rapport à la dernière colonne, on a: $V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) = x^n V_n(x_1, \dots, x_n) + \dots$ donc, par identification des coefficients, on a bien ce résultat. Par hypothèse de récurrence, on a donc:

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \quad = \quad \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \tag{1}$$

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \quad = \quad \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \tag{2}$$

Donc une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si les x_i sont distincts.

■

Théorème (Calcul du déterminant de Cauchy)

On a cette formules explicite pour le déterminant de Cauchy:

$$C(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

La démonstration de ces deux résultats se fait par récurrence.

Démonstration. *La preuve de se théorème se fait par récurrence sur n:*

⋆ ***Initialisation:*** *Au rang $n = 2$, on a:*

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{bmatrix} &= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_1+b_2)(a_2+b_1)} \\ &= \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \\ &= \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}\end{aligned}$$

⋆ ***Hérédité:*** *Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Supposons la formule vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$, en introduisant $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{C}$, puis en posant:*

$$A_{n+1} = C(a_1, \cdots, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_{n+1})$$

On a alors:

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n+1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n+1}+b_{n+1}} \end{vmatrix}$$

En multipliant chaque colonne C_j par $a_{n+1}+b_j$, on obtient:

$$A_{n+1} = \frac{1}{(a_{n+1}+b_1)\cdots(a_{n+1}+b_{n+1})}\begin{vmatrix} \frac{a_{n+1}+b_1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n+1}+b_1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Or, pour tous $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\frac{a_{n+1}+b_j}{a_i+b_j} = 1 + \frac{a_{n+1}-a_i}{a_i+b_j}$, donnant ainsi:

$$A_{n+1} = \frac{1}{(a_{n+1}+b_1)\cdots(a_{n+1}+b_{n+1})}\begin{vmatrix} 1+\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_1} & \cdots & 1+\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_1} & \cdots & 1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftarrow L_j - L_{n+1}$:

$$A_{n+1} = \frac{1}{(a_{n+1}+b_1)\cdots(a_{n+1}+b_{n+1})}\begin{vmatrix} \frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftarrow (a_{n+1} - a_j)L_j$:

$$A_{n+1} = \frac{(a_{n+1} - a_1)\cdots(a_{n+1} - a_n)}{(a_{n+1} + b_1)\cdots(a_{n+1} + b_{n+1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on effectue l'opération $C_j \leftarrow C_j - C_{n+1}$:

$$A_{n+1} = \frac{(a_{n+1} - a_1)\cdots(a_{n+1} - a_n)}{(a_{n+1} + b_1)\cdots(a_{n+1} + b_{n+1})} \begin{vmatrix} \frac{b_{n+1}-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_{n+1})} & \cdots & \frac{b_{n+1}-b_n}{(a_1+b_n)(a_1+b_{n+1})} & \frac{1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_{n+1}-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_{n+1})} & \cdots & \frac{b_{n+1}-b_n}{(a_n+b_n)(a_n+b_{n+1})} & \frac{1}{a_n+b_{n+1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne:

$$A_{n+1} = \frac{(a_{n+1} - a_1)\cdots(a_{n+1} - a_n)}{(a_{n+1} + b_1)\cdots(a_{n+1} + b_{n+1})} \begin{vmatrix} \frac{b_{n+1}-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_{n+1})} & \cdots & \frac{b_{n+1}-b_n}{(a_1+b_n)(a_1+b_{n+1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{n+1}-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_{n+1})} & \cdots & \frac{b_{n+1}-b_n}{(a_n+b_n)(a_n+b_{n+1})} \end{vmatrix}$$

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on effectue les opérations $C_j \leftarrow (b_{n+1} - b_j)C_j$ et $L_i \leftarrow (b_{n+1} + a_i)L_i$:

$$A_{n+1} = \frac{(a_{n+1} - a_1)\cdots(a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_1)\cdots(b_{n+1} - b_n)}{(a_{n+1} + b_1)\cdots(a_{n+1} + b_{n+1})(a_1 + b_{n+1})\cdots(a_n + b_{n+1})} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}}_{=A_n}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient:

$$A_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1} - a_i)(b_{n+1} - b_i) \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1} + b_j)\prod_{i=1}^{n+1}(a_i + b_{n+1}) \times (a_{n+1} + b_{n+1}) \times \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$$

Une réindéxation (cf. Figure 1) assure alors que:

$$A_{n+1} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}(a_i + b_j)}$$

Ce qui conclut.

■

Remarque. *Le passage de (1) à (2) lors du calcul du déterminant de Vandermonde se fait par "ré indexation" des termes:*

$j \backslash i$	1	2	$\cdots$	n	$n+1$
1					
2	■				
$\vdots$	■	■			
n	■	■	■		
$n+1$	■	■	■	■	

Figure 1: Illustration de la ré indexation. Les cases marquées d'un carré noir signifient que cet indice est compté dans le produit.

Cette même technique est utilisé lors de la dernière étape de calcul du déterminant de Cauchy.