Différentielle du déterminant et formule de Liouville

Leçons 152,215

Définition (Wronskien)

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et soit le système différentiel:

$$[L] : \begin{cases} Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = A(t)Y(t) \end{cases}$$

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ les solutions de $[L]$. On définit le Wronskien par:

$$W : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \det\left(Y_1(t), \cdots, Y_n(t)\right) \end{array}$$

Théorème (Différentielle du déterminant et formule de Liouville)

1. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée par:

$$d(\det)(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ H & \longmapsto & Tr\left[Com(A)^T H\right] \end{array}$$

2. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Tr[A(u)]\mathrm{d}u}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Calculer $d(\det)(I_n)$, puis $d(\det)(A)$ pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et prolonger à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par densité
2. Appliquer ce résultat afin de démontrer la formule de Liouville en montrant que W est solution d'une équation différentielle que l'on précisera

Démonstration. *1.* det *est polynomiale en les coefficients de la matrice donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:*

- Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det(I_n + H) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(I_n + H)_{1,\sigma(1)} \ldots (I_n + H)_{n,\sigma(n)} \\ &= (I_n + H)_{1,1} \ldots (I_n + H)_{n,n} \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{Id\}} \varepsilon(\sigma)(I_n + H)_{1,\sigma(1)} \ldots (I_n + H)_{n,\sigma(n)} \end{aligned}$$

Si $\sigma \neq Id$, alors ils existent $i < j \in [\![1, n]\!]$ tels que $(i, j) \neq (\sigma(i), \sigma(j))$ donc on a:

$$
\begin{aligned}
(I_n+H)_{1,\sigma(1)}\dots(I_n+H)_{n,\sigma(n)} &= H_iH_j \prod_{\substack{k=1\\ k\notin\{i,j\}}}^{n} (I_n+H)_{k,\sigma(k)} \\
&= \mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
\prod_{k=1}^{n}(I_n+H)_{k,\sigma(k)} = 1+\sum_{k=1}^{n} K_{k,k} + \mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)
$$

D'où:

$$
\begin{aligned}
\det(I_n+H) &= 1+Tr(H)+\mathcal{O}\left(\|H\|^2\right) \\
&= \det(I_n)+Tr(H)+\mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a:

$$
d(\det)(I_n)\cdot H = Tr(H)
$$

- *Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a:*

$$
\begin{aligned}
\det(A+H) &= \det(A)\det\left(I_n+A^{-1}H\right) \\
&= \det(A)\left[1+Tr[A^{-1}H]+\underbrace{\mathcal{O}\left(\|A^{-1}H\|^2\right)}_{=\mathcal{O}(\|H\|^2)}\right]
\end{aligned}
$$

Or, la formule de la comatrice assure que:

$$
A^{-1} = \frac{Com(A)^T}{\det(A)}
$$

Donc on a:

$$
\begin{aligned}
\det(A+H) &= \det(A)\left[1+\frac{1}{\det(A)}Tr\left[Com(A)^TH\right]+\mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)\right] \\
\det(A+H) &= \det(A)+Tr\left[Com(A)^TH\right]+\mathcal{O}\left(\|H\|^2\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Donc on a:

$$
d(\det)(A)\cdot H = Tr\left[Com(A)^TH\right]
$$

- *Comme on sait que* $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *la formule* (1) *s'étend par continuité de* det *et de* Tr *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(ces applications sont polynomiales en les coefficients de la matrice) à tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*: Ainsi, si,* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *il existe* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *telle que* $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$, *donc la formule* (1) *assure que:*

$$\det(A_k + H) \;=\; \det(A_k) + Tr\left[Com(A_k)^T H\right] + \mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)$$

En passant à la limite $k \longrightarrow +\infty$, *il vient:*

$$\det(A + H) \;=\; \det(A) + Tr\left[Com(A)^T H\right] + \mathcal{O}\left(\|H\|^2\right)$$

D'où:

$$d(\det)(A) \cdot H \;=\; Tr\left[Com(A)^T H\right]$$

2. *Posons la fonction* Φ *donnée par:*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & \begin{bmatrix} Y_1(t) & \dots & Y_n(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

(la matrice est donnée par les colonnes). Φ *et* det *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$, *donc, par composition,* W *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*. Donc* W *est différentiable (dérivable) sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *sa dérivée est donnée par:*

$$\begin{aligned} W'(t) &= d(\det)(\Phi(t)) \circ \Phi'(t) \\ &= Tr\left[Com(\Phi(t))^T \Phi'(t)\right] \end{aligned}$$

Or, $\Phi(t)$ *est la matrice des solutions de* $[L]$, *donc on a:*

$$\Phi'(t) \;=\; A(t)\Phi(t)$$

d'où:

$$\begin{aligned} W'(t) &= Tr\left[Com(\Phi(t))^T A(t)\Phi(t)\right] \\ &= Tr\left[A(t)\Phi(t)Com(\Phi(t))\right] \end{aligned}$$

or, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on a:* $MCom(M)^T = Com(M)^T M = \det(M)I_n$, *donc on a:*

$$\begin{aligned} W'(t) &= Tr\left[A(t)\det(\Phi(t))\right] \\ &= Tr\left[A(t)\right]\det(\Phi(t)) \\ &= Tr\left[A(t)\right]W(t) \end{aligned}$$

W est donc solution de l'équation différentielle $W' = Tr\left[A(t)\right]W$, que l'on sait résoudre, et on obtient ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Tr[A(u)]\mathrm{d}u} \qquad (2)$$

■

Remarques. *1. On dit parfois, par abus de notation, que $d(\det)(A) = Com(A)$, cette expression correspondant d'avantage au Gradient (vecteur des dérivées partielles), mais on a ici une application linéairre donnée par $H \longmapsto Tr\left[Com(A)^T H\right] = \langle Com(A)|H\rangle = \langle \nabla \det(A)|H\rangle$, ce qui correspond au produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. La formule de Liouville (2) indique que les solutions de [L] sont linéairement indépendantes (en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^n$) en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle le sont sur tout $\mathbb{R}$. Par exemple, en dimension 3, les trois solutions sont sur un même plan en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elles sont sur un même plan sur tout $\mathbb{R}$.