Dynamique des populations

Leçons 220,267

Théorème (Modèle de Verhulst)

Soient $x_0 \geqslant 0, a \neq 0, \kappa > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$[E] \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & ax\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

1. Il existe une unique solution définie sur un intervalle $]T^-, T^+[$ contenant 0.
2. La solution est positive et globale, sauf si $a < 0$ et $x_0 > \kappa$ (ce sera par la suite ignoré).
3. Si $a > 0$, 0 est point d'équilibre instable, κ est asymptotiquement stable. Si $a < 0$, les rôles sont inversés.
4. Il est possible de calculer une expression explicite de la solution.

Voici le plan de la démonstration:

1. Tracer le portrait de phase.
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution locale via le théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. En déduire la positivité et le caractère global.
4. Étudier les points d'équilibre en utilisant le théorème de stabilité en première approximation.
5. Calculer une solution explicite avec la méthode de séparation des variables.

Démonstration. *1. Voici le portrait de phase de l'équation différentielle. La courbe a pour paramétrisation $(x, ax(1 - \frac{x}{\kappa}))$.*

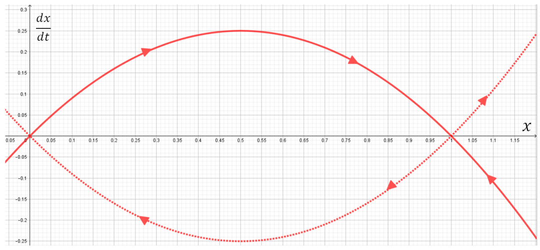

Figure 1: Tracé du portrait de phase associé à $[E]$. Le cas $a > 0$ est représenté en trait plein, et le cas $a < 0$ est représenté en trait pointillé. Les flèches indiquent les sens d'évolution de la solution. Ici, on a $\kappa = 1$

2. *L'application:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longrightarrow & ax\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en sa seconde variable x, car polynomiale, donc est localement lipschitzienne. Ainsi, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution à $[E]$ définie sur un intervalle $]T^-, T^+[$ contenant 0.

3. *On distingue plusieurs cas de figure:*

   - ⋆ *Si $a > 0$, on constate que, pour tout $x_0 \geqslant 0$, la trajectoire reste dans le domaine $\{x \geqslant 0\}$.*
   - ⋆ *De plus, si $a < 0$, $x_0 \in [0, \kappa]$, x va décroître, mais rester dans le domaine $\{x \geqslant 0\}$, et ne peut pas couper l'axe $\{x = 0\}$ (seule la solution nulle reste en 0).*
   - ⋆ *Si $x_0 \geqslant \kappa$, la trajectoire reste dans le domaine $\{x \geqslant 0\}$.*

   Donc on a la positivité, étudions maintenant le caractère global de la solution.

   - ⋆ *Si $x_0 \in [0, \kappa]$, x est bornée donc est définie sur tout temps (théorème des bouts).*
   - ⋆ *Lorsque $a > 0$ et $x_0 > \kappa$, x va décroître sans atteindre κ (seule la solution constante égale à κ peut y être), donc sera bornée, et la solution est également globale (théorème des bouts).*

4. *L'équation différentielle est autonome et s'écrit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$, avec f donnée par:*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right) \end{array} \quad \textit{donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \kappa\}$$

f est dérivable (car polyomiale) et f' est donnée par:

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a - \frac{2ax}{\kappa} \end{array} \quad \textit{donc } f'(0) = a \textit{ et } f'(\kappa) = -a$$

   - ⋆ *Si $a > 0$, $f'(0) > 0$ et $f'(\kappa) < 0$. Par le théorème de stabilité en première approximation, 0 est instable et κ est asymptotiquement stable.*

- ⋆ *Si $a < 0$, $f'(0) < 0$ et $f'(\kappa) > 0$. Toujours par le théorème de stabilité en première approximation, 0 est asymptotiquement stable st κ est instable.*

5. *Si $x_0 = 0$ (resp. $x_0 = \kappa$), alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ (resp. $x(t) = \kappa$). On suppose alors que $x_0 \notin \{0, \kappa\}$. Alors, pour tout $t > 0$, $x(t)$ n'est jamais égal à 0 ou κ. En séparant les variables, on a:*

$$x'(t) = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{\kappa}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'(t)}{x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{\kappa}\right)} = 0$$

De plus, une décomposition en éléments simples donne: $\dfrac{1}{X\left(1 - \frac{X}{\kappa}\right)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X - \kappa}$

Donc $\dfrac{x'(t)}{x(t)} - \dfrac{x'(t)}{x(t) - \kappa} = a$. *Intégrons:* $\displaystyle\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)}\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s) - \kappa}\mathrm{d}s = \int_0^t a\mathrm{d}s$

En poursuivant le calcul, on obtient:

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| - \ln\left|\frac{x(t) - \kappa}{x_0 - \kappa}\right| &= at \\
-\ln\left|1 - \frac{\kappa}{x(t)}\right| + \ln\left|1 - \frac{\kappa}{x_0}\right| &= at \\
1 - \frac{\kappa}{x(t)} &= \left(1 - \frac{\kappa}{x_0}\right)e^{-at} \\
\frac{\kappa}{x(t)} &= 1 + \left(\frac{\kappa}{x_0} - 1\right)e^{-at}
\end{aligned}$$

On obtient finalement une fonction logistique comme solution:

$$x(t) = \frac{\kappa}{1 + \left(\frac{\kappa}{x_0} - 1\right)e^{-at}}$$

■

Sur les courbes suivantes, on retrouve bien les caractéristiques étudiées (sens de variation, positivité, points d'équilibre...)

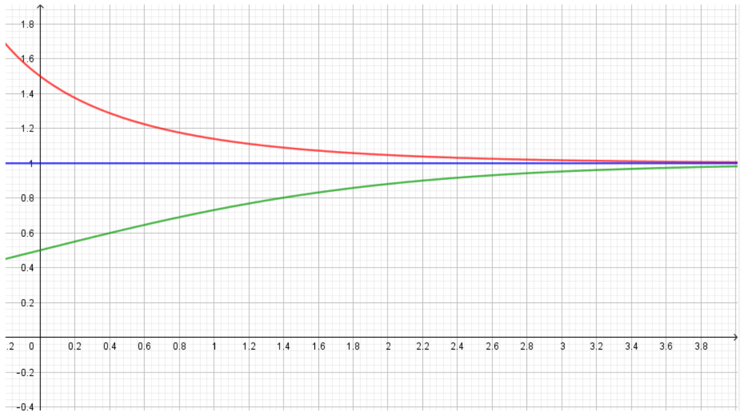

Figure 2: Tracé de solution explicite dans la cas $a > 0$ ($a = 1$), pour $\kappa = 1$ (solution constante en bleu), $x_0 = 0.5 < \kappa$ (courbe verte) et $x_0 = 1.5 > \kappa$ (courbe rouge).

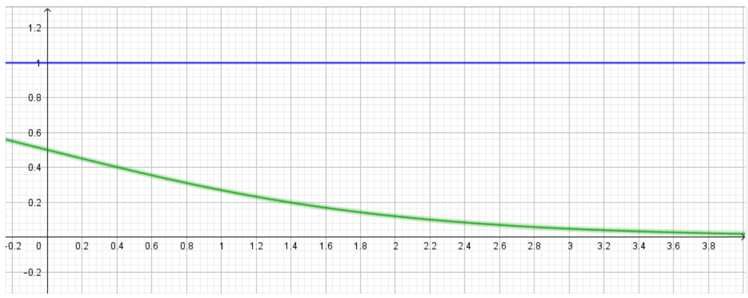

Figure 3: Tracé de solution explicite dans la cas $a < 0$ ($a = -1$), pour $\kappa = 1$ (solution constante en bleu), $x_0 = 0.5 < \kappa$ (courbe verte).

Remarques. 1. *a est appelé le taux d'accroissement de la population, et κ est la capacité d'accueil*

2. *Pour les agrégatifs suivant l'option B (Calcul Scientifique), ce thème peut éventuellement être rencontré dans les textes (c'est ce qui m'est arrivé lors de mon oral blanc). Pour aider les futures agrégatifs en option B, l'équation différentielle $x' = ax(1-\frac{x}{\kappa})$ stipule que les grandes populations on tendance à ne plus croître, contrairement aux petites. En fait, sur la figure 2, on retrouve bien le cas d'une transition démographique pour la courbe verte.*