Une équation différentielle avec des distributions

Leçons 221,228

Théorème (Une équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

Une solution de l'équation différentielle

$$[E] \quad : \quad T^{(p)} + a_{p-1}T^{(p-1)} + \cdots + a_1 T' + a_0 T = S$$

avec $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ (distribution à support dans $\mathbb{R}_+$) est donnée par $t \mapsto H(t)e^{\lambda_1 t} * \cdots * H(t)e^{\lambda_p t}$ où $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ (distribution de Heaviside) et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les racines (complexes) du polynôme $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $*$ désigne le produit de convolution.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le lemme 1 (formule des sauts)

2. Montrer le lemme 2 en appliquant la formule des sauts

3. Utiliser ces deux lemmes afin de conclure

Lemme 1 (Formule des sauts)

Soit $f \in \mathcal{C}^1_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), soient $a_1, \cdots, a_N$ les points où f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f admet une limite finie à gauche et à droite de ces points. Alors, en notant $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à f, on a:

$$T'_f \quad = \quad T_{f'} + \sum_{j=1}^{N} \left[f(a_j^+) - f(a_j^-) \right] \delta_{a_j}$$

$$\text{où } \langle T_{f'} | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \text{ et } f(a_j^{\pm}) = \lim_{x \to a_j^{\pm}} f(x)$$

Démonstration. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a:*

$$\langle T_f' | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle T_f | \varphi' \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\sum_{j=0}^{N} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

avec, par convention, $a_0 = -\infty$ et $a_{N+1} = +\infty$. Une intégration par parties assure que:

$$\langle T_f' | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\sum_{j=0}^{N} \left[f(x)\varphi(x)\right]_{x=a_j^+}^{x=a_{j+1}^-} + \sum_{j=0}^{N} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

φ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(a_j^-) = \varphi(a_j^+)$, et ainsi:

$$\begin{aligned}
\langle T_f' | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -f(a_1^-)\varphi(a_1) + f(a_1^+)\varphi(a_1) - f(a_2^-)\varphi(a_2) + \cdots \\
&+ f(a_{N-1}^+)\varphi(a_{N-1}) - f(a_N^-)\varphi(a_N) + f(a_N^+)\varphi(a_N) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi:

$$\langle T_f' | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^{N} \left[f(a_j^+) - f(a_j^-)\right] \langle \delta_{a_j} | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle T_{f'} | \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

Ce qui conclut.

■

Lemme 2

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a:

1. Au sens des distributions, on a la dérivée suivante:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H(t)e^{\lambda t}\right] = \lambda H(t)e^{\lambda t} + \delta_0$$

2. Soit $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Alors $t \mapsto H(t)e^{\lambda t} * S(t)$ est solution de l'équation différentielle $T' - \lambda T = S$.

Démonstration. *1. On utilise la formule des sauts.* $t \mapsto H(t)e^{\lambda t} \in \mathcal{C}^1_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *et le seul point où cette fonction n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *se trouve en* 0, *donc, comme on a:*

$$\lim_{t\to 0^+} H(t)e^{\lambda t} = 1 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} H(t)e^{\lambda t} = 0$$

La formule des sauts assure que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H(t)e^{\lambda t}\right] = \lambda H(t)e^{\lambda t} + \delta_0$

2. On sait que, pour tout $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, $(\delta'_0 - \lambda\delta_0) * T = T' - \lambda T$, *donc l'associativité du produit de convolution assure que:*

$$(\delta'_0 - \lambda\delta_0) * \left[H(t)e^{\lambda t} * S(t)\right] = \left[(\delta'_0 - \lambda\delta_0) * H(t)e^{\lambda t}\right] * S(t) = \delta_0 * S(t) = S(t)$$

■

Passons à la démonstration du théorème principal à proprement parler:

Démonstration. $[E]$ *est équivalente à:*

$$\left(\delta_0^{(p)} + a_{p-1}\delta_0^{(p-1)} + \cdots + a_1\delta'_0 + a_0\delta_0\right) * T = S$$

On peut ainsi factoriser $\delta_0^{(p)} + a_{p-1}\delta_0^{(p-1)} + \cdots + a_1\delta'_0 + a_0\delta_0$ *en* $(\delta'_0 - \lambda_1\delta_0) * \cdots * (\delta_0 - \lambda_p\delta_0)$ *(où la multiplication est remplacée par le produit de convolution). Donc on a:*

$$[E] \quad \Leftrightarrow \quad (\delta'_0 - \lambda_1\delta_0) * \cdots * (\delta_0 - \lambda_p\delta_0) * T = S$$

Par associativité du produit de convolution, on a:

$$(\delta'_0 - \lambda_1\delta_0) * [(\delta'_0 - \lambda_2\delta_0) * \cdots * (\delta_0 - \lambda_p\delta_0)] * T = S$$

D'après le lemme 2, il vient:

$$(\delta'_0 - \lambda_2\delta_0) * \cdots * (\delta_0 - \lambda_p\delta_0) * T = He^{\lambda_1 t} * S$$

Ainsi, en appliquant ce raisonnement aux autres facteurs et en utilisant la commutativité du produit de convolution, il vient:

$$\begin{aligned} T &= He^{\lambda_p t} * \cdots * He^{\lambda_1 t} * S \\ &= He^{\lambda_1 t} * \cdots * He^{\lambda_1 p t} * S \end{aligned}$$

On vérifie que cette distribution est solution de $[E]$.

■

Remarque. *Dans la formule des sauts, les hypothéses sur les points ou* $f \in \mathcal{C}^1_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *correspondent à des points de* ***discontinuité de première espèce*** *(limite finie de part et d'autre du point de discontinuité).*