Équation des ondes sur le cercle

Domaines: Équations aux dérivées partielles, Séries de Fourier, Calcul différentiel, Intégrales à paramètre

Théorème (Equation des ondes sur le cercle)

Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$, 2π-périodiques. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 2π-périodique en espace vérifiant l'équation suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = g \end{cases} \tag{1}$$

Voici le plan de la démonstration, utilisant un raisonnement par analyse-synthèse:

1. On fait l'analyse en explicitant *la* solution à l'aide des séries de Fourier
2. On fait la synthèse en montrant les propriétés de régularité de u à l'aide des théorèmes de régularité des séries de fonctions, et surtout en montrant que u ainsi construite vérifie bien l'équation des ondes.

Démonstration. *1. On fait l'analyse: Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ une solution de (1).*

Soient f et g, respectivement de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^1$, 2π-périodiques. Par le théorème de Dirichlet, f et g sont somme de leur série de Fourier (avec convergence uniforme de la série), donc ils existent $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (suite de limite nulle lorsque $|n| \to +\infty$) telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} \\ g(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{inx} \end{aligned}$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc est également somme de sa série de Fourier, ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

avec, pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x$$

Montrons que c_n est solution d'une équation différentielle:

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soit g_n donnée par:

$$g_n : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \end{array}$$

- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto g_n(x,t)$ *est mesurable (car continue)*
- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g_n(x, \cdot)$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$
- $\forall T_1 < T_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\forall t \in [T_1, T_2]$:

$$\left| \frac{\partial^2 g_n}{\partial t^2}(x,t) \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty([0,2\pi]\times[T_1,T_2])}$$

Donc, en vertu du théorème de régularité des intégrales à paramètre, c_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (régularité grâce à la majoration indépendante du paramètre t sur tout compact). De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} c_n''(t) & = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \mathrm{d}x \\ & \overset{(1)}{=} & \frac{c^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \mathrm{d}x \\ & \overset{IPP_1}{=} & \frac{c^2}{2\pi} \underbrace{\left[e^{-inx} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{c^2}{2\pi}(-in) \int_0^{2\pi} e^{-inx} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \mathrm{d}x \\ & = & \frac{inc^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \mathrm{d}x \\ & \overset{IPP_2}{=} & \frac{c^2 in}{2\pi} \underbrace{\left[e^{-inx} u(x,t) \right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{c^2 in}{2\pi}(-in) \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x \\ & = & -(cn)^2 \cdot c_n(t) \end{array}$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c_n(t) = A_n e^{inct} + B_n e^{-inct}$, avec:

$$\begin{array}{rcl} c_n(0) & = & A_n + B_n \\ & = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x \\ & = & a_n \\ c_n'(0) & = & inc(A_n - B_n) \\ & = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}x \\ & = & b_n \end{array}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{inc}\right)\\
B_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{b_n}{inc}\right)
\end{aligned}$$

De plus, nous avons $c_0(0) = a_0$ *et* $c_0'(0) = b_0 = 0$*, donc* $c_0(t) = a_0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Ainsi, pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(a_n + \frac{b_n}{inc}\right)e^{in(x+ct)} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(a_n - \frac{b_n}{inc}\right)e^{in(x-ct)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n e^{in(x+ct)} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n e^{in(x-ct)}\\
&+ \frac{1}{2c}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{b_n}{in}e^{in(x+ct)} - \frac{1}{2c}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{b_n}{in}e^{in(x-ct)}\\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

2. *On fait la synthèse. Montrons que u ainsi construite vérifie bien l'équation des ondes* (1)*.*

   $(x,t) \mapsto x+ct$ *et* $(x,t) \mapsto x-ct$ *sont de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *et* $f, \int_0^{\cdot} g(s)\mathrm{d}s \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$*, donc, par composition,* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$*. De plus, on a, pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{c}{2}\left[f'(x+ct) - f'(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right]\\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f'(x+ct) + f'(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[g(x+ct) - g(x-ct)\right]
\end{aligned}$$

   Ainsi que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{c^2}{2}\left[f''(x+ct) + f''(x-ct)\right] + \frac{c}{2}\left[g'(x+ct) - g'(x-ct)\right]\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f''(x+ct) + f''(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[g'(x+ct) + g'(x-ct)\right]
\end{aligned}$$

   D'une part, on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f(x)\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a bien, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce qui montre que u est bien solution de (1). De plus, la $2\pi-$périodicité des fonctions f et g assure que u est $2\pi-$périodique en espace.

■

Remarques. 1. *Contrairement à l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effets régularisants, et la condition initiale doit être de la bonne régularité afin que cette même régularité se conserve au cours du temps, ce qui est typique des EDP hyperboliques (linéaires).*

2. *On peut résoudre l'équation pour des conditions $L-$périodiques, où $L > 0$. Il suffit pour cela de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$g(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$$

On a ainsi:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Lx}{\pi} + L\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) = g(x)$$

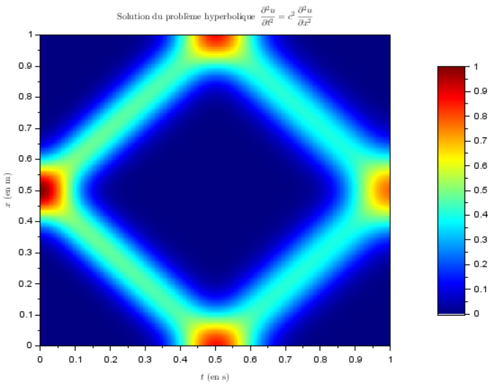

Figure 1: Simulation numérique de l'équation (1) sur l'intervalle $[0,1]$ (tige) avec conditions périodiques au bord, $c = 1m.s^{-1}$, en utilisant un schéma numérique implicite. La fonction f est une "gaussienne" et g est nulle