Équation de transport sur le cercle

Domaines: Équations aux dérivées partielles, Séries de Fourier, Suites et séries de fonctions, Intégrales à paramètre

Théorème (Equation de transport sur le cercle)

Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 2π-périodique en espace vérifiant l'équation suivante:

$$[T] \left\{ \begin{array}{rclcc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) & , & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) & = & f(x) & , & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Voici le plan de la démonstration, utilisant un raisonnement par analyse-synthèse:

1. On fait l'analyse en explicitant *la* solution à l'aide des séries de Fourier
2. On fait la synthèse en montrant les propriétés de régularité de u à l'aide des théorèmes de régularité des séries de fonctions, et surtout en montrant que u ainsi construite vérifie bien l'équation de transport.

Démonstration. 1. *On fait l'analyse: Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ une solution de $[T]$.*

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique. Par le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier (avec convergence uniforme de la série), donc il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (suite de limite nulle lorsque $|n| \to +\infty$) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

De même, pour tout $t > 0$, $u(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc est également somme de sa série de Fourier, ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

avec, pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x$$

Montrons que c_n est solution d'une équation différentielle:

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soit g_n donnée par:

$$g_n : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \end{array}$$

- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto g_n(x,t)$ *est mesurable (car continue)*
- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g_n(x, \cdot)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$
- $\forall T_1 < T_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\forall t \in [T_1, T_2]$:

$$\left|\frac{\partial g_n}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty([0,2\pi]\times[T_1,T_2])}$$

Donc, en vertu du théorème de régularité des intégrales à paramètre, c_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$. *De plus, on a, pour tout* $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x \\
&\overset{[T]}{=} \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x \\
&\overset{IPP}{=} \frac{c}{2\pi}\underbrace{\left[e^{-inx}u(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{c}{2\pi}(-in)\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,t)\mathrm{d}x \\
&= \frac{inc}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,t)\mathrm{d}x \\
&= inc \cdot c_n(t)
\end{aligned}$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c_n(t) = c_n(0)e^{inct}$. *Or, on a:*

$$\begin{aligned}
c_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,0)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x)\mathrm{d}x \\
&= a_n
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on a:*

$$c_n(t) = a_n e^{-inct}$$

Ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in(x+ct)} \\
&= f(x+ct)
\end{aligned}$$

2. *On fait la synthèse. Montrons que u ainsi construite vérifie bien l'équation de transport* $[T]$.

$(x,t) \mapsto x + ct$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, donc, par composition, $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De plus, on a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= cf'(x+ct) \\ &= c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \end{aligned}$$

Ainsi, u vérifie bien l'équation de transport $[T]$ avec les bonnes propriétés de régularité.

■

Remarques. 1. *Contrairement à l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effets régularisants, et la condition initiale doit être de la bonne régularité afin que cette même régularité se conserve au cours du temps, ce qui est typique des EDP hyperboliques (linéaires).*

2. *On peut résoudre l'équation pour des conditions $L-$périodiques, où $L > 0$. Il suffit pour cela de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$g(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$$

On a ainsi:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Lx}{\pi} + L\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) = g(x)$$

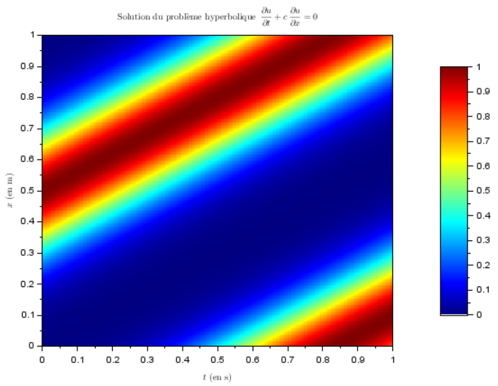

Figure 1: Simulation numérique de l'équation $[T]$ sur l'intervalle $[0,1]$ (tige) avec conditions périodiques au bord, $c = 0.6 m.s^{-1}$, en utilisant le schéma numérique de Lax-Wendroff