Holomorphie et prolongement de la fonction Γ

Leçons 207,245

Théorème (Holomorphie et prolongement de Γ)

Soit le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$. Posons, pour tout $z \in D$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

On a alors ces deux propriétés:

1. Γ est holomorphe sur D
2. Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en chaque entier naturel négatif. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Res_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer l'holomorphie de Γ sur D via le théorème d'holomorphie sous le signe intégral
2. Montrer la relation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, puis conclure.

Démonstration. *1. Soient $z \in D$ et $t > 0$. Posons $f(t,z) = t^{z-1}e^{-t}$. On a ainsi:*

- *Pour tout $z \in D$, $t \longmapsto f(t,z)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *Pour tout $t > 0$, $z \longmapsto f(t,z)$ est holomorphe sur D*
- *Soient $t > 0$ et $z \in D$. Soit $r_z = \frac{1}{2}|Re(z)| > 0$. Soit $u \in \overline{\mathbb{D}}(z, r_z)$. On a ainsi:*

$$|f(t,u)| = \left|t^{u-1}e^{-t}\right| = e^{-t}\left|e^{(u-1)\ln(t)}\right| = \frac{e^{-t}}{t}e^{Re(u)\ln(t)}$$

  ⋆ *Si $t \in]0,1]$, alors comme $\ln(t) \leqslant 0$, on a $Re(u) \geqslant \frac{1}{2}r_z$, soit $Re(u)\ln(t) \leqslant \frac{1}{2}r_z\ln(t)$. Ainsi, on a:*

$$|f(t,u)| \leqslant \frac{e^{-t}}{t}e^{\frac{1}{2}r_z\ln(t)} = e^{-t}t^{\frac{1}{2}r_z-1}$$

  et $t \longmapsto e^{-t}t^{\frac{1}{2}r_z-1} \in L^1(0,1)$

  ⋆ *Si $t > 1$, on obtient donc, puisque $\ln(t) \geqslant 0$ et $Re(u) \leqslant \frac{3}{2}r_z$:*

$$|f(t,u)| \leqslant \frac{e^{-t}}{t}e^{\frac{3}{2}r_z\ln(t)} \leqslant e^{-t}t^{\frac{3}{2}r_z-1}$$

  et ainsi, on a: $t \longmapsto e^{-t}t^{\frac{3}{2}r_z-1} \in L^1(1,+\infty)$

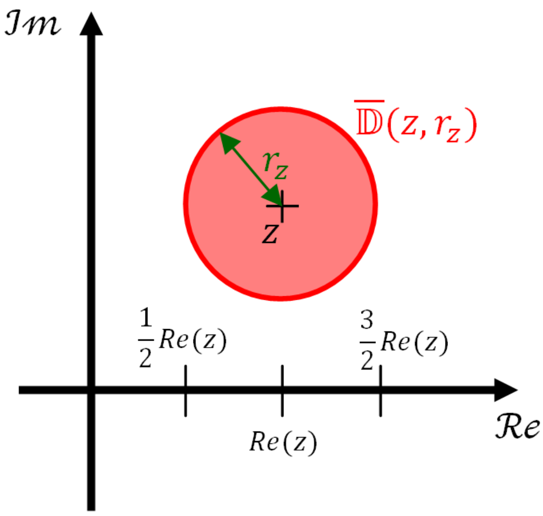

Figure 1: Illustration des inégalités $\frac{1}{2}Re(z) \leqslant Re(u) \leqslant \frac{3}{2}Re(u)$. u est contenu dans le cercle rouge.

Finalement, pour tout $z \in D$, ils existent $r_z > 0$ et $g_z \in L^1(0,+\infty)$ tels que, pour tout $u \in \overline{\mathbb{D}}(z,r_z)$:

$$|f(t,u)| \leqslant g_z(t)$$

où:

$$\begin{array}{cccc} g_z : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} e^{-t}t^{\frac{1}{2}r_z-1} & si & t \in]0,1] \\ e^{-t}t^{\frac{3}{2}r_z-1} & si & t > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, Γ est holomorphe sur D

2. *Soit $z \in D$. On a:*

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} \mathrm{d}t$$

Soit $T > 0$. Une intégration par parties montre que:

$$\int_0^T t^z e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^z e^{-t}\right]_{t=0}^{t=T} + z\int_0^T t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = -T^z e^{-T} + z\int_0^T t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Par croissance comparée, on a $-T^z e^{-T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\mathrm{d}t &= z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \qquad (1) \end{aligned}$$

3. *Une récurrence immédiate assure que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*:*

$$\Gamma(z+n) \quad = \quad (z+n-1)\dots(z+1)z\Gamma(z) \tag{2}$$

Comme $z \longmapsto \Gamma(z+n)$ *est holomorphe sur le domaine* $\{Re(z) > -n\}$, Γ *est donc holomorphe sur* $\{Re(z) > -1\} \setminus \{0, \dots, -(n-1)\}$*. Ainsi,* Γ *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$*. On a même un prolongement holomorphe de* Γ *au domaine* $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$*, avec des pôles en chaque entier négatif. De plus, au voisinage de* $-n$ *on a:*

$$\Gamma(z+1+n) \quad = \quad (z+n)(z+n-1)\dots(z+1)z\Gamma(z)$$

soit, toujours au voisinage de $-n$*:*

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &\quad = \quad \frac{\Gamma(z+1+n)}{(z+n)(z+n-1)\dots(z+1)z} \\
\Gamma(z) &\underset{z\to -n}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{(z+1)(-1)\dots(-n+1)(-n)} \\
\Gamma(z) &\underset{z\to -n}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}
\end{aligned}$$

D'où l'on obtient:

$$Res_{-n}(\Gamma) \quad = \quad \frac{(-1)^n}{n!}$$

■

Remarque. *La formule* (2) *se montre en appliquant* n *fois la relation fonctionnelle* (1)*, autrement dit, avec* n *intégrations par parties.*