L'homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Leçons 156,158

Dans tout ce qui suit, n est un entier supérieur ou égal à 1.

Théorème (Un homéomorphisme entre matrices symétriques)

L'application: $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie.
2. Montrer la surjectivité.
3. Montrer l'injectivité.
4. Montrer l'homéomorphisme.

Démonstration. *1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, ils existent $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que:*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\textit{Donc} \quad e^A = P^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Donc $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie.

2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ils existent $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ tels que:

$$PBP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Posons, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mu_j = \ln(\lambda_j)$.

$$\textit{On a donc:} \quad PBP^T = \begin{bmatrix} e^{\mu_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\mu_n} \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\textit{Donc:}\quad B = P^T \exp\begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P = \exp\left(P^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P\right)$$

$$\textit{et}\quad P^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{donc}\quad B \in \exp\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right).$$

3. *Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $e^{A_1} = e^{A_2}$. On va montrer que A_1 et A_2 commutent afin de pouvoir utiliser le critère de co-diagonalisabilité et conclure.*

   $\mathbb{R}[A_1]$ est de dimension finie (A_1^n dépend de I_n,...,A_1^{n-1} via χ_{A_1}) donc est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $e^{A_1} \in \mathbb{R}[A_1]$ comme limite d'une suite de polynômes en A_1.

   Donc A_1 et $e^{A_1} = e^{A_2}$ commutent. Montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A_2 = Q(e^{A_2})$.

$$\textit{On écrit}\quad A_2 = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P^T \ \textit{où } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \textit{ donnant ainsi:}$$

$$e^{A_2} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^T$$

   Par interpolation de Lagrange, on construit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $Q(e^{\lambda_j}) = \lambda_j$.

$$\textit{On obtient ainsi:}\quad A_2 = P \begin{bmatrix} Q(e^{\lambda_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(e^{\lambda_n}) \end{bmatrix} P^T$$

   Donc $A_2 = Q(e^{A_2}) = Q(e^{A_1})$. Ainsi, A_2 et $Q(e^{A_1})$ commutent.

   Donc A_1 et A_2 commutent, donc sont co-diagonalisables, i.e. il existent $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_1', \cdots, \lambda_n' \in \mathbb{R}$ tels que:

$$A_1 = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P^T \quad \textit{et}\quad A_2 = P \begin{bmatrix} \lambda_1' & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n' \end{bmatrix} P^T$$

$$\textit{Donc}\quad P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^T = e^{A_1} = e^{A_2} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1'} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n'} \end{bmatrix} P^T$$

d'où, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = \lambda'_j$, soit $A_1 = A_2$, ce qui conclut.

4. *Pour la topologie, on utilise la norme $|||\cdot||| : A \longmapsto \sqrt{\rho(AA^T)}$ (toutes les normes sont équivalentes). $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est continue, il reste donc à montrer que $\exp^{-1} : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est continue. Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices telle que $B_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit alors $A_k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = e^{A_k}$ (surjectivité de l'application). Montrons que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ où $B = e^A$.*

   La suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc son spectre est borné: Il existe $M_1 > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Sp(B_k) \subset [0, M_1]$ (les matrices B_k sont symétriques définies positives). Par continuité de l'inverse sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, $(B_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B^{-1} dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et la suite est bornée, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Sp(B_k) \subset [M_0, M_1] \subset \mathbb{R}_+^*$, avec $M_1 > M_0 > 0$.

   Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Sp(A_k) \subset [\ln(M_0), \ln(M_1)]$. $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, i.e. il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $A_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{A}$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ étant fermé, on a $\widetilde{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et par continuité de $\exp$, on obtient:

$$\begin{array}{ccc} e^{A_{\varphi(k)}} & \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} & e^{\widetilde{A}} \\ = & & \\ B_{\varphi(k)} & \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} & B = e^A \end{array}$$

   Donc $e^A = e^{\widetilde{A}}$, soit $A = \widetilde{A}$ par injectivité de $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc A est la seule valeur d'adhérence de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donc $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A.

   Donc $\exp^{-1} : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est continue, ce qui conclut.

■

Remarque. *On a les analogies suivantes:*

Propriété	*Version complexe*	*Version matricielle*
Homéomorphisme	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$	$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Surjection continue	$\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$	$\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$
Homéomorphisme de forme/décomposition polaire	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \longmapsto & re^{i\theta} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (S,\Omega) & \longmapsto & S\Omega \end{array}$