Inégalité isopérimétrique

Leçons 219,246,267

Théorème (Inégalité isopérimétrique)

Soit Γ une courbe fermée simple du plan (i.e. ne se recoupe pas) de classe $\mathcal{C}^1$. Soit L sa longueur et $\mathcal{A}$ l'unique domaine borné délimité par Γ. Soit $\lambda(\mathcal{A})$ l'aire de $\mathcal{A}$. On a alors:

1. $L^2 \geqslant 4\pi\lambda(\mathcal{A})$
2. On a égalité lorsque Γ est un cercle

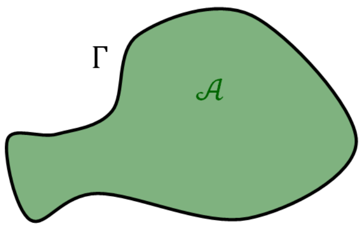

Figure 1: Illustration de Γ et de $\mathcal{A}$

Γ est paramétrée par:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{array}$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

Quitte à reparamétrer Γ, on peut supposer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|\gamma'(t)| = 1$. On aura ainsi:

$$L = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = 2\pi \tag{1}$$

Voici le plan de la démonstration du théorème:

1. Exprimer $\lambda(\mathcal{A})$ en fonction de γ et γ' et utiliser l'égalité de Parseval.
2. Exprimer L^2 en fonction de γ' et à nouveau utiliser l'égalité de Parseval.
3. Comparer les deux séries obtenues et établir l'inégalité demandée.
4. Etudier une condition pour que l'égalité soit une égalité.

Démonstration. *1. Tout d'abord, on a:*

$$\lambda(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Considérons la forme différentielle $\omega = -\frac{y}{2}\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\mathrm{d}y$. *On a alors:* $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. *En vertu du théorème de Stokes, on a:*

$$\int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\omega = \int_{\Gamma} \omega$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Donnant alors la formule de Green-Riemann:

$$\lambda(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \tag{2}$$

D'où l'on tire:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[y(t)x'(t) - x(t)y'(t)\right]\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}Im\int_0^{2\pi} \gamma(t)\overline{\gamma'(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

γ *peut-être vue comme une application* 2π*-périodique de classe* $\mathcal{C}^1$, *donc converge uniformément vers sa série de Fourier (théorème de Dirichlet), et est bien de carré intégrable, donc, en vertu de l'égalité de Parseval, on a:*

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{A}) &= -\frac{1}{2}Im\left[2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\gamma)\overline{c_n(\gamma')}\right] \\ &\overset{c_n(\gamma')=inc_n(\gamma)}{=} -\pi Im\sum_{n\in\mathbb{Z}} -in|c_n(\gamma)|^2\end{aligned}$$

D'où:

$$\lambda(\mathcal{A}) = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2$$

2. *De plus, on a:*

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\mathrm{d}t \\ &\overset{|\gamma'|=1}{=} \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par l'égalité de Parseval, on a:

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\gamma')|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$L^2 \overset{L=2\pi}{=} 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2$$

3. *On obtient ainsi:*

$$\begin{aligned} L^2 &= 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2 \\ &\geqslant 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2 = 4\pi\lambda(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

4. *En cas d'égalité, on doit avoir, pour tout $n \notin \{0,1\}$, $c_n(\gamma) = 0$, donc $\gamma(t) = c_0(\gamma) + c_1(\gamma)e^{it}$, i.e. γ paramétrise un cercle*

■

Remarque(s). 1. *Le reparamétrage de γ afin d'obtenir l'égalité* (1) *se fait de la manière suivante:*

Posons, pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{L}\int_0^t |\gamma'(s)|\mathrm{d}s$$

On a alors, pour tout $t \in [0, 2\pi], \varphi'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ (puisque γ ne se recoupe pas, sa dérivée de n'annule jamais). De plus, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2\pi) = 2\pi$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$ est donc une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, c'est même une $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

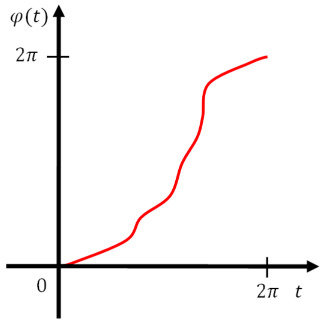

Figure 2: Illustration du $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ

Posons alors $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$ *comme reparamétrage de* γ*, et on a:*

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} &= \left(\varphi^{-1}\right)' \times \gamma \circ \varphi^{-1} \\ &= \frac{\gamma \circ \varphi^{-1}}{|\gamma \circ \varphi^{-1}|} \end{aligned}$$

de module 1*. On a bien:*

$$L = \int_0^{2\pi} \left|\widetilde{\gamma}'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

2. *La géométrie différentielle ayant disparu du programme de l'agrégation, il est possible d'admettre la formule de Green-Riemann* (2)*, et de la placer dans un lemme préliminaire admis avant le théorème principal dans la leçon*