Groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

Leçons 101,104,105,161,191

Définition (Groupe d'isométries)

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. On définit les groupes d'isométries (affines) et isométries positives, respectivement notés $Iso(A)$ et $Iso^+(A)$ par:

$$\begin{aligned} Iso(\mathcal{A}) &= \{f = g + a, g \in O_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n : f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\} \\ Iso^+(\mathcal{A}) &= \{f = g + a, g \in SO_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n : f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Théorème (Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre)

Soient Δ_4 le tétraèdre régulier et C_8 le cube (le tout dans $\mathbb{R}^3$). On a alors:

$$Iso(\Delta_4) = S_4 \qquad Iso(C_8) = S_4 \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$
$$Iso^+(C_8) = S_4$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Construire le cube et le tétraèdre
2. Étudier le groupe d'isométries du tétraèdre en le faisant agir sur Δ_4.
3. Étudier $Iso^+(C_8)$ en le faisant agir sur les grandes diagonales du cube, puis en utilisant un isomorphisme présenté plus loin

Démonstration. *1. On peut définir le cube à partir de la liste de ses huit sommets:*

$$\{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}$$

On peut ensuite obtenir le tétraèdre Δ_4 en ne reliant "qu'un sommet sur deux" et obtenir la liste de ses sommets:

$$\{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

2. On créée un tétraèdre de sommets A, B, C, D. L'action du groupe $Iso(\Delta_4)$ sur $\{A, B, C, D\}$ correspond à la donnée d'un morphisme:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Iso(\Delta_4) & \longrightarrow & S_{\{A,B,C,D\}} \simeq S_4 \\ f & \longmapsto & f|_{\{A,B,C,D\}} \end{array}$$

On va montrer que φ est un isomorphisme:

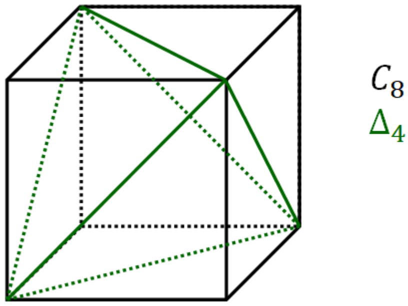

Figure 1: Construction du tétraèdre à partir du cube

- *On montre l'injectivité: Soit* $f \in Iso(\Delta_4)$ *telle que* $\varphi(f) = Id$. *On a:* $f(A) = A, \ldots, f(D) = D$. *Comme* $\left\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ *forme un repère affine de* $\mathbb{R}^3$, $f = Id$
- *On montre la surjectivité: On cherche un antécédent à la transposition* (AB). *Soit* σ *la réflexion par rapport au plan* $(\mathcal{P})$. *On a:* $\sigma(A) = B$ $\sigma(B) = A$, $\sigma(C) = C$ *et* $\sigma(D) = D$, *donc* $\varphi(\sigma) = (AB)$. *Comme les transpositions engendrent* $S_{\{A,B,C,D\}} \simeq S_4$, φ *est surjective.*

Donc φ *est un isomorphisme.*

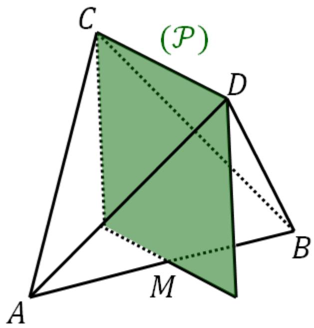

Figure 2: Illustration de la surjectivité de φ

3. *On construit le cube de sommets* $A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4$, *de grandes diagonales* $D_1, \ldots, D_4$. *On fait agir* $Iso^+(C_8)$ *sur ces dernières, donnant ainsi un morphisme:*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Iso^+(C_8) & \longrightarrow & S_{\{A,B,C,D\}} \simeq S_4 \\ & f & \longmapsto & f|_{\{A,B,C,D\}} \end{array}$$

Montrons que ϕ *est un isomorphisme:*

- *On montre l'injectivité: Soit* $f \in Iso^+(C_8)$ *tel que* $\phi(f) = Id$. *Par l'absurde, supposons que* $f \neq Id$. *Il existe* $i \in [\![1, 4]\!]$ *tel que* $f(A_i) = B_i$ *car* f *doit conserver*

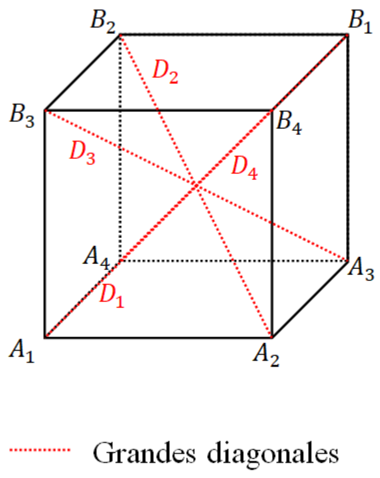

Figure 3: Illustration de grandes diagonales

toutes les diagonales.

Si il existe $j \in [\![1,4]\!] \setminus \{i\}$ *tel que* $f(A_j) = A_j$, *alors les distances ne seront pas conservées. Par exemple, si* $i = 1$ *et* $j = 2$, *alors* $[A_1, A_2]$ *est de longueur 1 mais* $[f(A_1), f(A_2)] = [B_1, A_2]$ *est de longeur* $\sqrt{2}$, *ce qui contredit le fait que* f *est une isométrie.*

Ainsi, on obtient que, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $f(A_i) = B_i$, *donc* $f = -Id \notin Iso^+(C_8)$. *Donc* $f = Id$, *ce qui montre l'injectivité de* ϕ

- *On montre la surjectivité: Soit* (D_iD_j) *une transposition. On sait que* S_4 *est engendré par les transpositions. Soit* $f \in Iso^+(C_8)$ *données par:*

$$\begin{array}{ll} f(A_i) = A_j & f(B_i) = B_j \\ f(A_j) = A_i & f(B_j) = B_i \end{array}$$

Il s'agit bien d'une isométrie directe (une rotation) et $\phi(f) = (D_iD_j)$. *Cela montre la surjectivité de* ϕ.

ϕ *est un isomorphisme et on a:*

$$Iso^+(C_8) \quad = \quad S_{\{D_1,D_2,D_3,D_4\}} \simeq S_4$$

De plus, on remarque que pour tout $f \in Iso^+(C_8)$, $(-Id) \circ f = f \circ (-Id)$. *On a ainsi un isomorphisme:*

$$\psi : \begin{array}{ccc} Iso^+(C_8) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \longrightarrow & Iso(C_8) \\ (f, \overline{\varepsilon}) & \longmapsto & (-Id)^{\varepsilon} \circ f \end{array}$$

avec $\overline{\varepsilon} \in \{0, 1\}$

■

Remarque. *L'isomorphisme* ψ *est en réalité valable si on remplace* C_8 *par un ensemble ayant un centre de symétrie en dimension impaire.*

Reférence(s). *P.Caldero, J.Germoni, Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries*