Groupe d'isométries du dodécaèdre

Domaines: Actions des groupe, isométries dans l'espace, techniques d'algèbre en géométrie, groupes d'ordre fini

Théorème (Groupe d'isométries du dodécaèdre)

Soit P_{12} un dodécaèdre régulier. Le groupe d'isométries de P_{12} est donné, à isomorphisme près, par:

$$Iso(P_{12}) = \mathcal{A}_5 \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

Voici le plan de la démonstration:

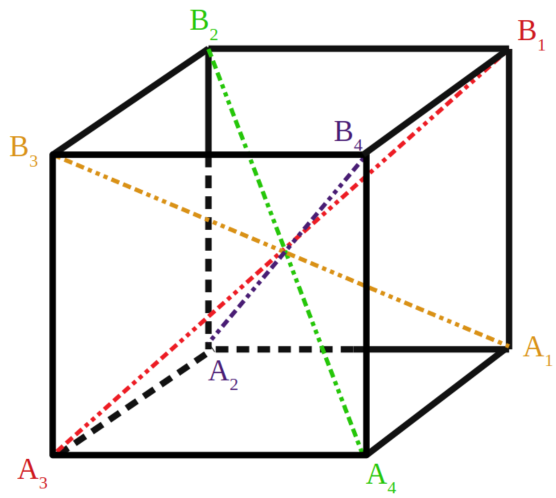
1. Montrer que P_{12} existe bien en donnant la liste de ses sommets
2. Calculer $Iso^+(P_{12})$, le groupe d'isométries directes de P_{12}, en le faisant agir sur un ensemble de cubes inscrits dans P_{12}.
3. Conclure en calculant $Iso(P_{12})$.

Lemme (Grandes diagonales d'un cube fixes par isométrie)

Soit f une isométrie, qui laisse fixe les grandes diagonales d'un cube de centre $(0,0,0)$. Alors $f = \pm Id$

Démonstration. *Considérons un cube de sommets $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ et B_4. Comme f fixe les grandes diagonales, on a donc:*

$$\begin{aligned} f([A_1B_3]) &= [A_1B_3] \\ f([A_2B_4]) &= [A_2B_4] \\ f([A_3B_1]) &= [A_3B_1] \\ f([A_4B_2]) &= [A_4B_2] \end{aligned}$$



Donc, si $f \neq Id$, alors il existe $i \in [\![1,4]\!]$ tel que $f(A_i) \neq A_i$. On peut supposer, quitte à tourner le cube, que $i = 1$, donnant ainsi $f(A_1) = B_3$.

De plus, $f(A_2) = A_2$ ou B_4. f étant une isométrie, on doit avoir $[f(A_1)f(A_2)] = [A_1A_2]$. La seule option est que $f(A_2) = B_4$.

Enfin, $f(A_3) = A_3$ ou B_1. Là encore, le fait que f soit une isométrie impose d'avoir $[f(A_1)f(A_3)] = [A_1A_3]$, ce qui n'est vrai que lorsque $f(A_3) = B_1$.

On a par ailleurs: $f(B_3) = A_1$, $f(B_4) = A_2$ et $f(B_1) = A_3$, donnant ainsi:

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{A_1B_3}\right) &= -\overrightarrow{A_1B_3} \\ f\left(\overrightarrow{A_2B_4}\right) &= -\overrightarrow{A_2B_4} \\ f\left(\overrightarrow{A_3B_1}\right) &= -\overrightarrow{A_3B_1} \end{aligned}$$

Or, la famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{A_1B_3}, \overrightarrow{A_2B_4}, \overrightarrow{A_3B_1}\right\}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$, donc $f = -Id$.

■

Démonstration. *1. Soit le nombre d'or:*

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Soient les 20 points suivants;

$$\begin{array}{ccc} (\pm 1, \pm 1, \pm 1) & , & \left(\pm\varphi, \pm\dfrac{1}{\varphi}, 0\right) \\ \left(0, \pm\varphi, \pm\dfrac{1}{\varphi}\right) & , & \left(\pm\dfrac{1}{\varphi}, 0, \pm\varphi\right) \end{array}$$

Ce sont les sommets de P_{12}.

On peut étudier la distance entre les points et montrer que les arrêtes ont la même longueur, et que la mesure d'angle entre deux arrêtes liées par un même point est identique (i.e. on a bien des pentagones réguliers comme faces), ce qui se fait au moyen du produit scalaire de deux vecteurs.

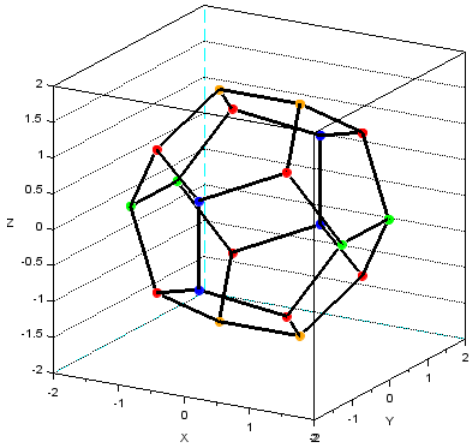


Figure 1: Illustration via Scilab de sommets de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ en rouge, $\left(\pm\varphi, \pm\frac{1}{\varphi}, 0\right)$ en vert, $\left(0, \pm\varphi, \pm\frac{1}{\varphi}\right)$ en bleu et $\left(\pm\frac{1}{\varphi}, 0, \pm\varphi\right)$ en orange

2. *Considérons les cinq cubes inscrits à P_{12} (le fait que ce sont des cubes se montre là encore via un calcul de longueur d'arrête et de mesure d'angle entre deux arrêtes liées par un même point), et appelons-les C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5.*

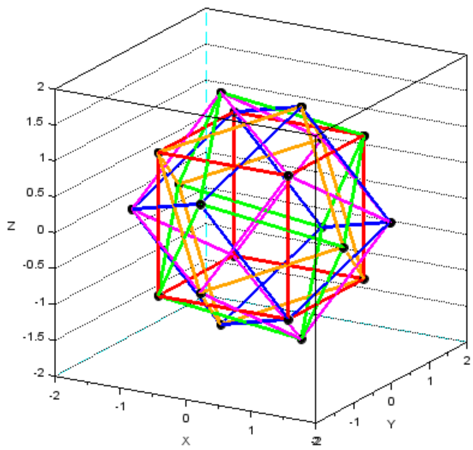


Figure 2: Illustration via Scilab des cubes inscrits du dodécaèdre

Faisons agir $Iso^+(P_{12})$ sur l'ensemble $\mathcal{C}$ donné par:

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

via l'action de groupe suivante:

$$\forall f \in Iso^+(P_{12}), \forall C \in \mathcal{C}, f \cdot C = f(C)$$

où $f(C)$ désigne l'image du cube C par f, qui est bien un autre cube de $\mathcal{C}$ car f est une isométrie. En effet, si $f(C)$ n'est pas dans $\mathcal{C}$, alors des distances ne sont pas *préservées, ce qui contredit le fait que f soit une isométrie. Cette action de groupe correspond à la donnée d'un morphisme:*

$$\begin{array}{cccc} \phi: & Iso^+(P_{12}) & \longrightarrow & S_{\mathcal{C}} \simeq S_5 \\ & f & \longmapsto & f|_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Montrons que le morphisme ϕ est injectif. Soit $f \in Iso^+(P_{12})$ tel que $\phi(f) = Id$, i.e. pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, $f(C_i) = C_i$.

Ainsi, si $i \neq j \in [\![1, 5]\!]$, alors comme $f(C_i) = C_i$ et $f(C_j) = C_j$ on a $f(C_i \cap C_j) \subseteq C_i \cap C_j$. Or, deux cubes distincts de $\mathcal{C}$ ont exactement deux points en commun (cf. Fig.2), que l'on note $A^{i,j}$ et $B^{i,j}$.

Ainsi, pour tous $i \neq j \in [\![1, 5]\!]$:

$$f([A^{i,j}B^{i,j}]) \quad = \quad [A^{i,j}B^{i,j}]$$

c'est-à-dire que:

$$f\left(\overrightarrow{A^{i,j}B^{i,j}}\right) \quad = \quad \pm\overrightarrow{A^{i,j}B^{i,j}}$$

f fixe donc les grandes diagonales de chaque cube. Or, f est une isométrie, donc $f = \pm Id$. Comme f est positive, on obtient $f = Id$. ϕ est donc injective.

Déterminons l'image de ϕ.

Les isométries positives (ou directes) préservant P_{12} - des rotations, car nous sommes dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ - sont:

- *L'identité (1)*
- *Une rotation à 120 ° par sommet, selon l'axe entre ce sommet et le sommet opposé (20)*
- *Une rotation à 180 ° par paire d'arrêtes opposées, selon l'axe passant par le milieu de deux arrêtes opposées (15)*
- *Une rotation à 72 ° par paires de faces opposées, selon l'axe passant par le centre des deux faces opposées (12)*
- *Une rotation à 144 ° par paire de faces opposées, selon l'axe passant par le centre des deux faces opposées (12)*

Cela donne $1 + 20 + 15 + 12 + 12 = 60$ isométries positives pour P_{12}.

Donc $|\phi(Iso^+(P_{12}))| = 60$, et comme $\phi(Iso^+(P_{12})) \leqslant S_5$, $Iso^+(P_{12})$ est donc isomorphe à un sous-groupe de S_5 d'ordre 60. Or, $\mathcal{A}_5$ est le seul sous-groupe de S_5 d'ordre 60, donc:

$$Iso^+(P_{12}) \quad \simeq \quad \mathcal{A}_5$$

3. *Pour conclure, comme* P_{12} *admet* $O = (0,0,0)$ *comme centre de symétrie, on a cet isomorphisme:*

$$\begin{array}{ccc} Iso^+(P_{12}) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sim} & Iso(P_{12}) \\ (f, \overline{\varepsilon}) & \longmapsto & (-Id)^{\varepsilon} \circ f \end{array}$$

(qui marche puisque nous sommes en dimension impaire, donc $-Id$ *est une isométrie indirecte), donc, à isomorphisme près:*

$$Iso(P_{12}) \quad = \quad \mathcal{A}_5 \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

■

Reférence. *P.Caldero, J.Germoni, Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries (en particulier pour l'isomorphisme de la fin de la démonstration en dimension impaire)*