Théorème de Krein-Milman

Leçons 159,181,253

Dans tout ce qui suit, E est un espace euclidien de dimension finie n, que l'on munit d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne associée $||\cdot||$.

Définitions (Point extremal - Hyperplan d'appui)

1. Soit C un convexe non vide de E. On dit que $c \in C$ est un **point extrémal** si $C \setminus \{c\}$ ext convexe.
2. Soit C un convexe non vide de E. On dit qu'un hyperplan affine H est un **hyperplan d'appui** à C en $c \in C$ si $c \in H$ et C est contenu dans l'un des demi-espaces délimités par H.

Théorème (Théorème de Krein-Milman)

Soit K un convexe compact non vide de E. Alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer que si C est un convexe fermé non vide de E, alors il existe un hyperplan d'appui à C en $c \in \partial C$.
2. Montrer que, pour tout $a \in K$, si a est dans un hyperplan d'appui H de K, alors a est point extrémal de K si et seulement si a est point extrémal du convexe compact $H \cap K$.
3. Conclure en raisonnant par récurrence sur la dimension du sous-espace affine engendré par K.

Lemme (Existence de l'hyperplan d'appui)

Soient C un convexe fermé non vide de E et $c \in \partial C$. On a alors:

1. La projection $p : E \longrightarrow C$ est continue.
2. Il existe un hyperplan d'appui H à C en c.

Démonstration. *1. Soient $x, y \in E$. On a alors:*

$$\begin{aligned}
||p(x)-p(y)||^2 &= \langle p(x)-x+x-y+y-p(y)|p(x)-p(y)\rangle \\
&= \underbrace{\langle p(x)-x|p(x)-p(y)\rangle}_{\leqslant 0 \text{ (Th. de projection)}} + \langle x-y|p(x)-p(y)\rangle \\
&+ \underbrace{\langle y-p(y)|p(x)-p(y)\rangle}_{\leqslant 0 \text{ (Th. de projection)}} \\
&\leqslant \langle x-y|p(x)-p(y)\rangle \\
&\underset{Cauchy-Scwarz}{\leqslant} ||x-y||\,||p(x)-p(y)||
\end{aligned}$$

Si $p(x) \neq p(y)$, alors p est $1-$lipschitzienne, ce qui est aussi le cas si $p(x) = p(y)$. Donc p est continue.

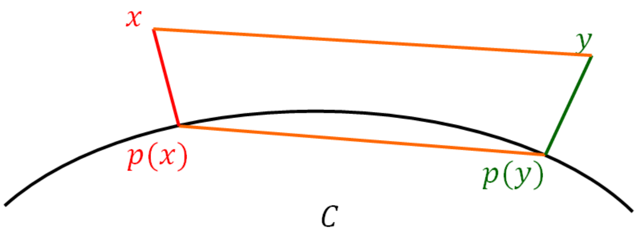

Figure 1: Illustration du caractère $1-$lipschitzien de p.

2. *Soit $c \in \partial C$, tel que $c \in \overline{E \backslash C}$. Il existe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E \backslash C^{\mathbb{N}}$ telle que $x_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} c$. On peut trouver un hyperplan affine H_k tel que C soit contenu dans un demi-espace délimité par H_k. Un vecteur orthogonal à H_k est donné par:*

$$u_k = \frac{x_k - p(x_k)}{||x_k - p(x_k)||} \perp H_k$$

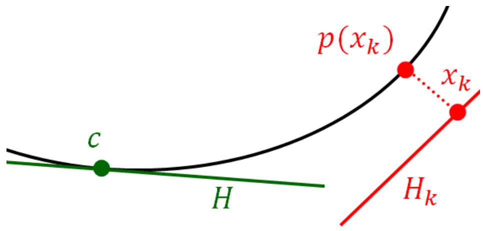

Figure 2: Illustration des hyperplans d'appui H_k et H, lorsque la suite (x_k) tend vers c.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \in \$^{n-1}$, et la $(n-1)-$sphère unité est compacte, donc il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Notons u sa limite.

Soit H l'hyperplan affine d'équation $\langle x|u \rangle = \langle c|u \rangle$. C'est notre candidat idéal pour être hyperplan d'appui en c. Soit $z \in C$. Le théorème de projection (et la caractérisation par l'angle obtus) nous assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_{\varphi(k)} | z - p(x_{\varphi(k)}) \rangle \leqslant 0 \tag{1}$$

Comme $p(x_{\varphi(k)}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} p(c)$ par continuité de p, on a, par passage à la limite dans l'inégalité (1) :

$$\langle u | z - p(c) \rangle \leqslant 0$$

et $p(c) = c$ donc, pour tout $z \in C$, $\langle u|z\rangle \leqslant \langle u|c\rangle$. Donc C est contenu dans l'un des demi-espaces $\{\langle u|z\rangle \leqslant \langle u|c\rangle\}$ ou $\{\langle u|z\rangle \geqslant \langle u|c\rangle\}$, et $H = \{\langle u|z\rangle = \langle u|c\rangle\}$ est bien un hyperplan d'appui.

■

Théorème (Lien avec les points extrémaux)

1. Soit $a \in K$. Si a est dans un hyperplan d'appui H de K, a est point extrémal de K si et seulement si a est point extrémal du convexe compact $H \cap K$.

2. K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. *1. On raisonne par double implication:*

- ⋆ *$\Rightarrow$ Soit $a \in K$ un point extrémal. $K \setminus \{a\}$ est un convexe et $(K\setminus\{a\}) \cap H \underset{a\in H}{=} (K \cap H) \setminus \{a\}$ est convexe (comme intersection de convexes) donc a est point extrémal de $H \cap K$.*

- ⋆ *$\Leftarrow$ Si a est un point extrémal de $H \cap K$. Montrons que a est point extrémal de K, i.e.$K\setminus\{a\}$ est convexe. Soient $u, v \in K$ tels que $a = \frac{u+v}{2}$. Montrons que $u = v = a$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $H = \{x \in E : \varphi(x) = \lambda\}$. Or, K est inclus dans un demi-espace fermé délimité par H, donc on a par exemple $\varphi(u), \varphi(v) \leqslant \lambda$. Or, $\varphi(a) = \frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2} = \lambda$, donc $\varphi(u) = \varphi(v) = \lambda$, i.e. $u, v \in H$. Donc $u, v \in H \cap K$, donc $u = v = a$ puisque a est point extrémal de $H \cap K$.*

2. Montrons le résultat par récurrence sur la dimension p du sous-espace affine engendré par K:

- ⋆ ***Initialisation:*** *Si $p = 0$, K est un singleton et le résultat est vrai.*

- ⋆ ***Hérédité:*** *On suppose le résultat vrai en dimension $p-1$ et on se donne K convexe compact, non vide qui engendre le sous-espace affine de dimension p. Quitte à translater K et à remplacer E par un sous-espace vectoriel, on peut supposer que $p = \dim(E)$. Soit $c \in K$. On cherche à écrire c comme barycentre de points extrémaux de K (à coefficients positifs). Deux cas se distinguent:*

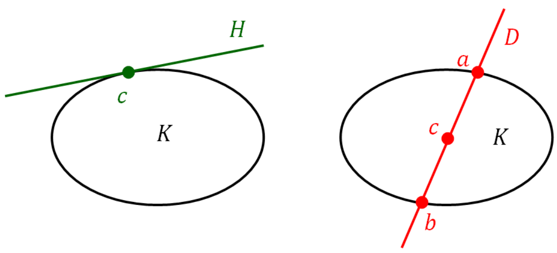

Figure 3: Illustration des deux cas de figure à l'hérédité lors de la preuve par récurrence du second point de ce théorème.

→ *$c \in \partial K$. Soit H l'hyperplan d'appui en c (existe bien d'après le lemme), et soit $K' = K \cap H$. K' est dans un sous-espace affine de dimension $p-1$ (au plus) et est convexe. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence, en notant que tout point extrémal de $H \cap K$ est point extrémal de K.*

→ *$c \in \overset{\circ}{K}$. Soit D une droite quelconque qui passe par c. D est une droite (dimension 1) et est fermée. Donc, par compacité de K, $D \cap K$ est un compact, convexe, inclus dans D, c'est en fait un segment $D \cap K = [a, b]$, où $a, b \in \partial K$. Le résultat est vrai pour a, b et c est barycentre de a et b. Par associativité des barycentres, c est barycentre de points extrémaux de K (combinaison convexe).*

■

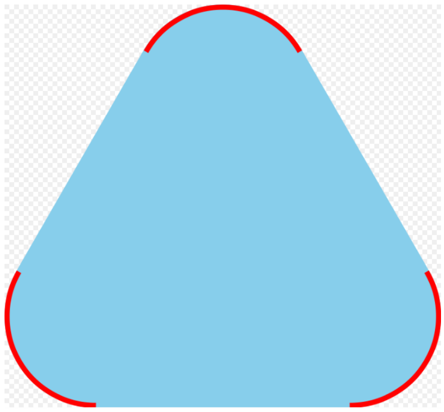

Figure 4: Illustration du théorème de Krein-Milman. Les points extrémaux de K (en bleu) apparaissent en rouge (source, Wikipédia)

Reférence. *S.Francinou, H.Gianella, S.Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 3*