

Liste des développements associés aux leçons

Introduction

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des enseignantes et enseignants de l'université Rennes 1 et de l'ENS Rennes pour m'avoir donné des conseils dans la préparation des leçons et des développements. Merci également à mes camarades de classe et aux anciens agrégatifs pour leur aide apportée dans la préparation des oraux.

Ce petit document a pour but de faire un récapitulatif des développements que j'ai associé à chaque leçon. Bien sûr, d'autres développements peuvent venir s'insérer dans une leçon, et, comme beaucoup d'agrégatifs, j'ai eu recours à plus ou moins de recyclage...

Voici quelques petites suggestions pour vous, dont certaines sont mentionnées dans le rapport du jury:

- On peut proposer trois développements dans une leçon (pour ma part la 250 en comportait cinq potentiels...), mais cette stratégie ne rapportera aucun point supplémentaire. Au contraire, on peut placer le deux que l'on préfère pour cette leçon, et rajouter les autres en applications, d'autant plus que l'on saura répondre au jury si il nous pose des questions dessus, ce qui sera pour le coup valorisé (conseil reçu lors d'un oral blanc).
- Les développements de géométrie se recyclent bien en algèbre, ceux de probabilités, en analyse.
- Pour les leçons d'algèbre, les développements croisant topologie et algèbre (homéomorphisme $exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, décomposition polaire et surtout simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$) se recyclent bien dans les deux leçons 203 (compacité) et/ou 204 (connexité).
- Bien exploiter chaque "facette" du développement que l'on recycle dans la leçon correspondante. Un exemple typique est le roi du recyclage, la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Pour les leçons 103, 106, 203 et 204, l'accent est mis sur le fait que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe-compact, tandis que pour les leçons 108 et 160, on préfère plutôt montrer que les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$.
- Enfin, et cette remarque est moins générale et, je l'espère, valable uniquement pour l'année 2019-2020, mes camarades de cette année et moi-même n'avons pas pu mettre en application nos plans de leçons et développements. En effet, la pandémie de Covid-19 a contraint le jury à annuler les oraux, ne me permettant de mettre en pratique la préparation aux oraux uniquement lors d'un oral blanc en Janvier 2020.

1 - Leçons d'Algèbre et Géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

- Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$
- Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre

102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous groupes des racines de l'unité. Applications

- Formules de Cardan
- Déterminant de Vandermonde et corps cyclotomiques

103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications

- Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

104 - Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications

- Simplicité de \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$
- Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Simplicité de \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$
- Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Exemples.

IMPASSE

- Table de caractères de S_4

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Simplicité de \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique
- Irréductibilité d'une fraction particulière

121 - Nombres premiers. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique
- Théorème des deux carrés

122 - Anneaux principaux. Applications.

- Irréductibilité d'une fraction particulière
- Théorème des deux carrés

123 - Corps finis. Applications.

- Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q[X]$
- Algorithme de Berlekamp

125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

- Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q[X]$
- Déterminant de Vandermonde et corps cyclotomiques

126 - Exemples d'équations en arithmétique.

- Triplets Pythagoriciens
- Théorème des deux carrés

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

- Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q[X]$
- Algorithme de Berlekamp

142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

- Triplets Pythagoriciens
- Algorithme de Berlekamp

144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

- Formules de Cardan
- Le laplacien discret 1D

150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

- Décomposition polaire
- Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

- Algorithme de Berlekamp
- Réduction de Frobenius

152 - Déterminant. Exemples et applications.

- Différentielle du déterminant et formule de Liouville
- Déterminant de Vandermonde et corps cyclotomiques

153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre
- L'équation matricielle $e^A = I_n$

154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents
- Réduction de Frobenius

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

- Le laplacien discret 1D
- Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre

156 - Exponentielle de matrices. Applications.

- L'équation matricielle $e^A = I_n$
- L'homéomorphisme $exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- L'équation matricielle $e^A = I_n$
- Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents

158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- L'homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
- Lemme de Morse

159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

- Réduction de Frobenius
- Théorème de Krein-Milman

160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- La méthode QR pour le problème des moindres carrés
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

161 - Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

- Régression linéaire
- Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre

162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

- Cinq points définissant une conique
- Régression linéaire

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

- Réciprocité quadratique
- Lemme de Morse

171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

- Lemme de Morse
- Cinq points définissant une conique

181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

- Suite de polygones convergeant vers l'isobarycentre
- Théorème de Krein-Milman

190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$
- Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q[X]$

191 - Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

- Suite de polygones convergeant vers l'isobarycentre
- Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre

2 - Leçons d'Analyse et Probabilités**201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.**

- Théorème de Riez-Fischer
- Fonctions à variation bornée

203 - Utilisation de la notion de compacité.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- Décomposition polaire

204 - Connexité. Exemples et applications.

- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

- Théorème de Riez-Fischer
- Théorèmes du point fixe et de Cauchy-Lipshitz globalement lipshitzien

207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global
- Holomorphie et prolongement de Γ

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

- Théorème de Riez-Fischer
- Théorème de Plancherel

209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

- Polynômes de Bernstein
- Densité des polynômes orthogonaux

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- Théorème de Plancherel
- Densité des polynômes orthogonaux

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Lemme de Morse

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications

- Différentielle du déterminant et formule de Liouville
- Lemme de Morse

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Régression linéaire
- L' inégalité isopérimétrique

220 - Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2.

- Théorèmes du point fixe et de Cauchy-Lipshitz globalement lipshitzien
- Dynamique des populations

221 - Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global
- Une équation différentielle avec des distributions

222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

- L' équation de la chaleur sur le cercle
- Le laplacien discret 1D

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Développement asymptotique de la série harmonique
- Méthode de Newton

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

- Le laplacien discret 1D
- Méthode de Newton

228 - Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Méthode des trapèzes
- Une équation différentielle avec des distributions

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- Fonctions à variation bornée
- Inégalités de convexité et applications

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Développement asymptotique de la série harmonique
- Méthode des trapèzes

233 - Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

- Le laplacien discret 1D
- La méthode QR pour le problème des moindres carrés

234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

- Théorème de Riesz-Fischer
- Densité des polynômes orthogonaux

235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

- Formule de Stirling
- Intégrale de Dirichlet

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- Intégrale de Dirichlet
- Méthode des trapèzes

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Intégrale de Dirichlet
- Densité des polynômes orthogonaux

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Théorème de Riez-Fischer
- Polynômes de Bernstein

243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Théorème de Liouville
- Séries génératrices et lois discrètes usuelles

245 - Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

- Holomorphie et prolongement de Γ
- Théorème de Liouville

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

- L'équation de la chaleur sur le cercle
- L' inégalité isopérimétrique

250 - Transformation de Fourier. Applications.

- Théorème de Plancherel
- Densité des polynômes orthogonaux

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse

- Théorème de Krein-Milman
- Inégalités de convexité et applications

261 - Loi d'une variable aléatoire: caractérisations, exemples, applications.

- Théorème Central Limite
- Polynômes de Bernstein

262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications

- Théorème Central Limite
- Polynômes de Bernstein

264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

- Polynômes de Bernstein
- Séries génératrices et lois discrètes usuelles

265 - Exemples d'étude et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

- Intégrale de Dirichlet
- Formule de Stirling

266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

- Théorème Central Limite
- Polynômes de Bernstein

267 - Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

- Dynamique des populations
- L'inégalité isopérimétrique

3 - Liste de développements par cote de popularité

Rang	Développement	Leçons l'utilisant
		6 leçons
1	Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$	103-106-108-160-203-204
2	Polynômes de Bernstein	209-241-261-262-264-266
		5 leçons
3	Théorème de Riez-Fischer	201-205-208-234-241
4	Densité des polynômes orthogonaux	209-213-234-239-250
5	Groupes d'isométrie du cube et du tétraèdre	101-104-105-161-191
6	Le laplacien discret 1D	144-155-222-226-233
7	Lemme de Morse	158-170-171-214-215
8	Dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$	101-103-106-150-190
		4 leçons
9	Simplicité de \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$	103-104-105-108
10	Intégrale de Dirichlet	235-236-239-265
11	Comptage de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{F}_q[X]$	123-125-141-190
12	Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre	153-155-181-191
13	Algorithme de Berlekamp	123-141-142-151
		3 leçons
14	L'inégalité isopérimétrique	219-246-267
15	Théorème des deux carrés	121-122-126
16	Régression linéaire	161-162-219
17	Déterminant de Vandermonde et corps cyclotomiques	102-125-152
18	L'équation matricielle $e^A = I_n$	153-156-157
19	Méthode des trapèzes	228-230-236
20	Théorème Central Limite	261-262-266
21	Réduction de Frobenius	151-154-159
22	Théorème de Krein-Milman	159-181-253
23	Loi de réciprocité quadratique	120-121-170
		2 leçons
24	Théorème de d'Alembert-Gauss	204-214
25	Formule de Stirling	235-265
26	L'équation de la chaleur sur le cercle	222-246
27	La méthode QR pour le problème des moindres carrés	160-233
28	Différentielle du déterminant et formule de Liouville	152-215
29	Théorème de Plancherel	208-250
30	Holomorphie et prolongement de Γ	207-245

31	Théorèmes du point fixe et CYL globalement lipschitzien	205-220
32	Une équation différentielle avec des distributions	221-228
33	Triplets Pythagoriciens	126-142
34	Théorème de Cauchy-Lipschitz global	207-221
35	Méthode de Newton	223-226
36	Théorème de Liouville	243-245
37	Inégalités de convexité et applications	229-253
38	Fonctions à variation bornée	201-229
39	Dynamique des populations	220-267
40	L'homéomorphisme $exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$	156-158
41	Formules de Cardan	102-144
42	Développement asymptotique de la série harmonique	223-230
43	Décomposition polaire	150-203
44	Irréductibilité d'une fraction particulière	120-122
45	Cinq points définissant une conique	161-171
46	Reduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents	154-157
47	Séries génératrices et lois discrètes usuelles	243-264
		1 leçon
48	Table de caractères de S_4	107
		Abandonnés
49	Deux déterminants classiques: Vandermonde et Cauchy	
50	Groupe projectif (spécial) linéaire et groupe symétrique	

Légende:

- **Développements d'algèbre-géométrie (20)**
- **Développements d'analyse-probabilités (22)**
- **Développements mixtes (8)**