Mémoire de Master 2

Leçon 265: Exemples d'étude et d'application de fonctions usuelles et spéciales

Leçon encadrée par Isabelle GRUAIS
Présentation réalisée le 16 Octobre 2019

Remerciements

Je remercie Isabelle GRUAIS pour l'aide apportée ainsi que les conseils donnés dans la rédaction de ce mémoire ainsi que la préparation de cette leçon. Je remercie également ma collègue Maud pour m'avoir aidé et conseillé dans la préparation de cette leçon en binôme.

Table des matières

Introduction

Les fonctions usuelles sont un point incontournable en analyse mathématique. Étudiées dès le lycée (voire au collège pour les fonctions trigonométriques en tant qu'outil géométrique) ces fonctions se retrouvent presque partout en analyse, en particulier dans l'étude de croissance comparées où l'obtention de majorations. Ces fonctions usuelles sont également importantes dans de nombreuses autres sciences (ingénierie, physique, biologie...). Quand aux fonctions spéciales, elles sont largement utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques (analyse complexe, intégration, théorie des nombres...) via l'étude de séries, sans oublier l'étude de problèmes physiques complexes voire même des applications en ingénierie. A travers ce mémoire, nous suivrons un plan de leçon envisageable à l'oral de l'agrégation.

Dans une première partie, nous allons définir et étudier quelques fonctions usuelles: Exponentielle, logarithme, trigonométriques et puissances. En particulier, quelles sont leurs propriétés fonctionnelles, leur régularité ainsi que limites. Il sera question dans cette partie de fonctions réciproques et d'une étude ce ces dernières.

La seconde partie propose d'étudier des applications de fonctions usuelles, qu'il s'agisse de comparaisons de limites et d'applications à l'étude de convergence d'intégrales, ou bien de développements en série de Taylor (ou série entière). Une extension de la fonction exponentielle sera faite à l'exponentielle de matrices et ses applications aux équations différentielles.

Enfin, la troisième partie étudie deux fonctions spéciales fondamentales en analyse. D'une part, la fonction Zêta de Riemann, et son lien avec les nombres premiers. D'autre part, la fonction Gamma d'Euler, ses propriétés fonctionnelles et son lien avec la factorielle, dont la formule de Stirling constituera notre premier développement. La fin de cette partie est accordée à la transformation de Laplace, outil utilisé dans d'autres sciences, dont les propriétés permettent entre autres le calcul d'intégrales, dont l'intégrale de Dirichlet qui fera l'objet de notre second développement.

La leçon sera illustrée par des exemples et des graphes de fonctions.

Partie 1

Plan de la leçon

1.1 Fonctions usuelles

1.1.1 Fonction exponentielle

Définition (Fonction exponentielle)

On définit sur $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle définie par:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Remarque. *Cette série est absolument convergente sur* $\mathbb{C}$

Proposition

$z \longmapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est y égale à sa dérivée: $\exp' = \exp$

Corollaire

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Remarque. *Géométriquement, ce résultat implique que la tangente au graphe de la fonction exponentielle en 0 est d'équation* $y = x + 1$

Exemple.

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[e^{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$

Proposition

1. $\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$

Remarque. *On remarque que* $\exp : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes*

Proposition

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante

Corollaire

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Remarque. *On a:* $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq \frac{x^n}{n!}$, *montrant ainsi que lorsque* $x \to +\infty$, *l'exponentielle et à croissance plus rapide que toute fonction polynomiale.*

1.1.2 Fonction logarithme

Définition (Fonction logarithme népérien)

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction logarithme népérien, notée ln, par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Proposition (Propriétés fonctionnelles du logarithme)

1. $\forall x, y > 0, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\forall x > 0, \quad \ln(1 + x) > 0$
3. $\ln(1) = 0$

Proposition

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de réciproque $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

Remarque. $\ln : (\mathbb{R}^*, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ *est un isomorphisme de groupes, c'est la reciproque de* $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \times)$

Corollaire

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Proposition

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

Proposition (Une inégalité classique sur le logarithme)

$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

Corollaire

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Remarque. *Géométriquement, ce résultat implique que la tangente au graphe de la fonction logarithme nepérien admet pour équation* $y = x - 1$

Exemple.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = 1$$

Définition (Logarithme de base quelconque)

On définit le logarithme de base $a > 0, a \neq 1$ par:

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Exemple. *On définit le logarithme décimal par:*

$$\forall x > 0, \quad \log_{10}(x) = \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Définition (Exponentielle de base quelconque)

On définit la fonction exponentielle de base $a > 0$ par:

$$\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & a^x = e^{\ln(a)x} \end{array}$$

Remarque. *C'est la réciproque de* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Application

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

1.1.3 Fonctions trigonométriques et réciproques

Définition (Fonctions trigonométriques)

On définit les fonctions trigonométriques de cette manière:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \cos(x) = \Re\left(e^{ix}\right)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \sin(x) = \Im\left(e^{ix}\right)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\},\ \ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Remarque. *Géométriquement, ces définitions peuvent s'illustrer par le fait que si un point du cercle unité admet $x \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ pour mesure d'angle orienté avec l'axe des abscisses, alors son abscisse (projection sur l'axe (Ox)) vaut $\cos(x)$ et son ordonnée (projection sur l'axe (Oy)) vaut $\sin(x)$.*

Proposition (Propriétés fontionnelles des fonctions trigonométriques)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$

1. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
2. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
3. si $x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\quad \tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
4. cos est paire, sin est impaire et tan est impaire sur leurs domaines de définition respectifs.

Des propriétés de dérivabilité de l'exponentielle on en déduit cette proposition:

Proposition (Propriétés de dérivabilité des fonctions trigonométriques)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. sin, cos et tan sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et de dérivées respectives $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ et $\tan' = 1 + \tan^2$

Proposition (Une inégalité classique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sin(x) \leqslant x$

Remarque. *Géométriquement, ce résultat implique que la partie du graphe de la fonction sinus situé à droite de l'axe des ordonnées (Oy) (i.e pour $x \geq 0$) sera situé en dessous de la droite d'équation $y = x$.*

Définition (Sinus cardinal)

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction sinus cardinal, notée *sinc*, par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad sinc(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. *Des résultats précédents on en déduit que la fonction sinus cardinal est bien définie.*

Proposition (Trois bijections)

Les trois applications suivantes sont des bijections:

1. $$\sin : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

2. $$\cos : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

3. $$\tan : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

Définition (Fonctions trigonométriques réciproques)

On définit les fonctions trigonométriques réciproques de sin, cos et tan de la manière suivante:

1. $$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \sin^{-1}(x) \end{array}$$

2. $$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \cos^{-1}(x) \end{array}$$

3. $$\arctan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \tan^{-1}(x) \end{array}$$

Remarque. *Les fonctions* sin, cos *et* tan *utilisées dans la définition sont en réalité leurs restrictions respectivement aux intervalles* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $[0;\pi]$ *et* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, *qui sont bien des bijections d'après la précédente proposition, ce qui justifie l'emploi de leur réciproque.*

Proposition (Propriétés fonctionnelles des fonctions trigonométriques réciproques)

1. $\forall x \in [-1;1]\,,\quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Proposition (Dérivabilité des fonctions trigonométriques réciproques)

Les fonctions arcsin, arccos et arctan sont dérivables respectivement sur $]-1;1[$, $]-1;1[$ et $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont données par:

1. $\forall x \in]-1;1[\,,\quad \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\forall x \in]-1;1[\,,\quad \arcsin'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1.1.4 Fonctions puissances

Définition (Fonction puissance)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance α de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \end{array}$$

Remarque. *On en déduit ainsi que lorsque $x \to +\infty$, la fonction exponentielle est à croissance supérieure à toute fonction puissance, même réelle.*

Proposition (Propriétés fonctionnelles des fonctions puissances)

Soient $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$
2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$
3. $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$

Proposition (Dérivabilité de la fonction puissance)

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha x^{\alpha-1} \end{array}$$

Remarque. *Quand $\alpha \geq 0$, $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge par continuité en 0 (en y attribuant la valeur 0). Quand $\alpha \in \mathbb{Z}$, on peut prolonger cette fonction à $\mathbb{R}^*$ et même à $\mathbb{R}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$*

Exemple. *La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$*

1.2 Applications des fonction usuelles en analyse

1.2.1 Résultats de croissance comparée

Lemme (Une limite importante)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

Application (Intégrabilité du logarithme)

En changeant x en $\ln(x)$, puis en inversant, on montre que $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$, ce qui permet de montrer la convergence de l'intégrale:

$$\int_0^1 \ln(x) \mathrm{d}x$$

On obtient ainsi $\ln \in L^1(0;1)$

Proposition (Résultats de croissance comparée)

Soient $\alpha, \beta > 0$, $a > 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ (Logarithme-Polynomial inverse)
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty$ (Exponentiel-Polynomial inverse)
3. $\lim_{x \to 0} x^\alpha \left|\ln(x)\right|^\beta = 0$ (Polynomial-Logarithme)
4. $\lim_{x \to -\infty} a^x \left|x\right|^\gamma = 0$ (Exponentiel-Polynomial)

Exemple. $\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))}\right) = \frac{\pi}{2}$

Application (Intégrales de Bertrand)

L'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)^\alpha x^\beta}$$

où $\alpha, \beta > 0$ converge si et seulement si ($\beta > 1$ ou $\beta = 1$ et $\alpha > 1$)

1.2.2 Développements en série entière

Proposition (Trois développements en série entière importants)

1. $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. $$\forall x \in]-1;1[\,, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \right] x^n$$

3. $$\forall x \in]-1;1[\,, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Remarques. *1. Le troisième développement en série entière se retrouve en réalité à partir du second. Il est toutefois privilégié car simple à écrire, dans la mesure où il s'agit de la somme d'une série géométrique. Il est également plus souvent utilisé que le second développement.*

2. Le domaine de convergence de chaque série entière ne correspond par toujours à la droite réelle

Application

On peut retrouver les développements en série entière de certaines fonctions à partir des trois de la proposition: sin ou cos (à partir du premier, en remarquant que ce dernier s'étend au plan complexe), arcsin ou arccos (à partir du second) ou encore $x \mapsto \ln(1+x)$ ou arctan (à partir du troisième)

Exemple. ***Développement en série entière de la fonction artangente***

$$\forall x \in]-1;1[\,, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Application (Calcul d'une série)

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

donc on a:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Remarque. *On peut retrouver le développement limité d'une fonction à partir de son développement en série entière en tronquant la série au n^{eme} terme puis en considérant le reste comme* $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$

Exemple.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

1.2.3 Exponentielle de matrices

Dans cette sous-partie, $n \in \mathbb{N}^*$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est absolument convergente

Remarque. *L'espace de matrices carrées d'ordre n $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forme un espace de Banach, donc toute série absolument convergente est convergente, et on sait que $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ (propriété vérifiée par les normes subordonnées), donc on obtient la majoration $\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||} < +\infty$, donc la convergence absolue de la série exponentielle, i.e. la convergence de cette même série.*

Définition (Exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On définit l'exponentielle de la matrice A par:

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Proposition (Propriétés de l'exponentielle de matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

1. Si $AB = BA$ alors on a $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$
2. $e^{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = diag\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$
3. Si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B = P^{-1}AP$ alors $e^B = P^{-1}e^A P$
4. $\det\left(e^A\right) = e^{Tr(A)}$

Lemme

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & e^{tA} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & Ae^{tA} \end{array}$$

Théorème(Systèmes différentiels linéaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le système différentiel linéaire suivant:

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet pour unique solution la fonction:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA} X_0 \end{array}$$

Exemple. *Considérons le système différentiel suivant:*

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

On a alors, en posant:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall t \geq 0; \quad e^{tA} = \exp(tI_2 + tN)$$

Or, on a: $tI_2 \cdot tN = tN \cdot tI_2$, donnant ainsi:

$$\begin{array}{rcl} e^{tA} & = & e^t I_2 (I_2 + tN) \\ e^{tA} & = & \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \end{array}$$

On obtient alors, en posant: $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$:

$$\forall t \geq 0; \quad \begin{cases} x(t) & = & e^t x_0 & + & te^t y_0 \\ y(t) & = & & & e^t y_0 \end{cases}$$

1.3 Fonctions spéciales

1.3.1 Fonction ζ de Riemann

Définition (Fonction ζ de Riemann)

On définit la fonction ζ de Riemann par:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1, \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Proposition (Holomorphie de ζ)

ζ est holomorphe sur le domaine $\{\Re(z) > 1\}$ et sa dérivée k-ième est donnée par:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \{\Re(z) > 1\}, \quad \zeta^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^z}$$

Théorème (Produit Eulérien)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ($\mathcal{P} = \{2; 3; 5; 7; 11 \ldots\}$). On a alors:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1, \quad \zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Proposition (Prolongement de la fonction ζ)

ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$ avec un pôle en $z = 1$

Remarque. *La fonction ζ de Riemann prolonge dans une partie du plan complexe les séries de Riemann de la forme:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

où $z \in]1; +\infty[$ On sait de plus calculer quelques valeurs de la fonction ζ de Riemann, par exemple $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \ldots$

1.3.2 Fonction Γ d'Euler

Définition (Fonction Γ d'Euler)

On définit la fonction Γ d'Euler par:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0, \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Proposition (Holomorphie de Γ)

Γ est holomorphe sur le domaine $\{\Re(z) > 0\}$ et sa dérivée k-ième est donnée par:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \{\Re(z) > 0\}, \quad \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \, t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Proposition

Vue comme fonction réelle sur $]0; +\infty[$, Γ est logarithmiquement convexe et est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

Proposition (Relation fonctionnelle fondamentale de Γ)

$$\forall z \in \{\Re(z) > 0\}\,; \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Corollaire

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Proposition (Prolongement de Γ)

Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles en tout entier naturel négatif. De plus, on a la formule suivante:

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{-\mathbb{N}\}\,; \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+1)\dots(z+n)}$$

Remarque. *La fonction Γ prolonge la factorielle au domaine $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, ou encore les intégrales de la forme:*

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

pour $z \in \mathbb{R}_+^*$

Théorème (Formule de Stirling - Développement 1)

$$\Gamma(x+1) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Remarque. *Cette formule est cohérente avec l'équivalent de la factorielle*

1.3.3 Transformée de Laplace

Définition (Transformée de Laplace)

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. On définit sa **transformée de Laplace** par:

$$\forall s > 0, \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$$

Remarque. *L'hypothèse $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ est restrictive, en effet, on peut supposer que $\forall s > 0, \forall t \geq 0, |f(t)| \leq e^{\frac{t}{2}}$, auquel cas nous avons par exemple, en lien avec la fonction Γ d'Euler:*

$$\forall s > 0, \Gamma(s) = \mathcal{L}\left\{t \longmapsto t^{s-1}\right\}(1)$$

Exemple. *Si $f(t) = 1$, alors on a:*

$$\forall s > 0; \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

Proposition (Propriétés de la transformée de Laplace)

Si $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, alors on a:

1. $\forall s > 0, \mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$
2. $\mathcal{L}\{f\}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $s > 0$, on a:

$$\mathcal{L}\{f\}'(s) = -\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. *On peut seulement supposer* $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ *mesurable dans le point (ii)*

Théorème (Intégrale de Dirichlet - Développement 2)

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

est convergente et on peut même calculer sa valeur:

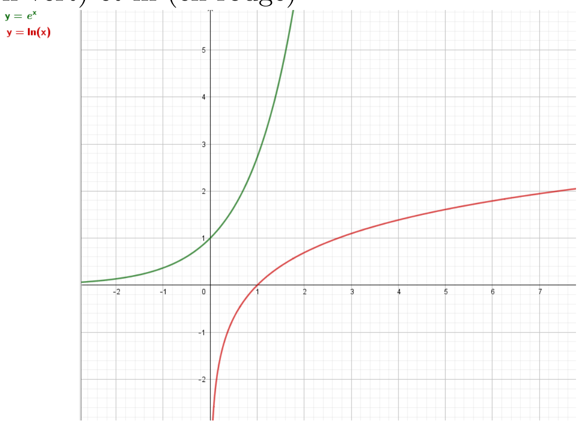
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Remarque. *L'intégrale de Dirichlet constitue un exemple d'intégrale semi-convergente (i.e. qui ne converge pas absolument)*

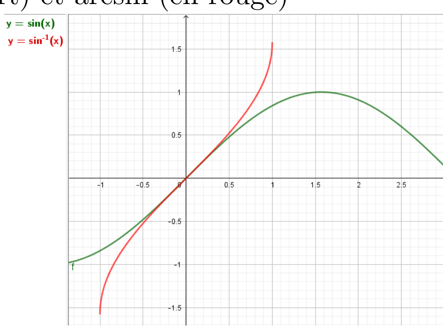
Partie 2

Annexe : Graphes de quelques fonctions usuelles

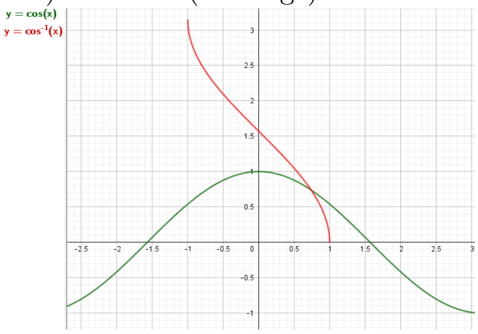
(i) - Graphe de exp (en vert) et ln (en rouge)



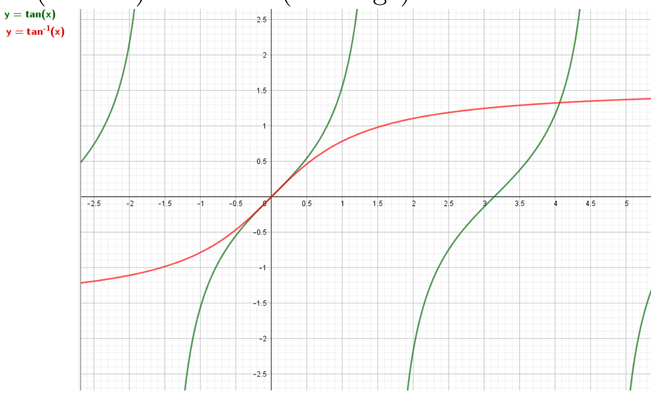
(ii) - Graphe de sin (en vert) et arcsin (en rouge)



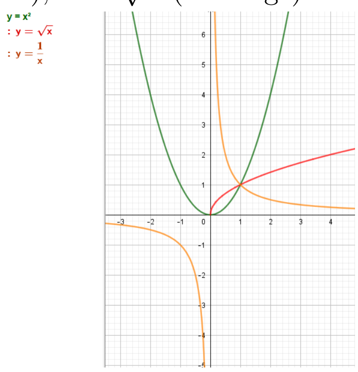
(iii) - Graphe de cos (en vert) et arccos (en rouge)



(vi) - Graphe de tan (en vert) et arctan (en rouge)



(v) - Graphe de $x \mapsto x^2$ (en vert), $x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) et $x \mapsto \frac{1}{x}$ (en orange)



Partie 3

Développements

3.1 Formule de Stirling

Théorème (Formule de Stirling - Développement 1)

$$\Gamma\left(x+1\right) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer l'équivalent:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

2. Etudier l'intégrale

$$\int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \text{lorsque } x\to+\infty$$

Démonstration. *1. Soit $x>0$:*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t + \int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

Par un changement de variable $t=u+x$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \left(u+x\right)^x e^{-(u+x)}\mathrm{d}u \\
&\leq \int_x^{+\infty} (2u)^x e^{-(u+x)}\mathrm{d}u \\
&\leq \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On a donc l'encadrement: $\quad 0 \leq \displaystyle\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \leq \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$

$$\textit{Comme } \frac{2}{e} < 1 \textit{ on obtient alors: } \int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\Gamma(x+1)\right)$$

D'où:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

2. *Soit* $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t &\overset{t=u+x}{=} e^{-x}\int_{-x}^{x}(u+x)^x e^{-u}\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\mathrm{d}u\\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x I_x\end{aligned}$$

$$\textit{où } I_x = \int_{\mathbb{R}} f_x(u)\mathrm{d}u \textit{ et } f_x(u) = \mathbf{1}_{]-x;x[}(u)\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\mathrm{d}u$$

Montrons que $\frac{I_x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$ *ce qui donnera l'équivalent demandé. On va pour cela utiliser le théorème de convergence dominée.*

Si $u \in \left]-x;x\right[$*, alors:*

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u} = e^{x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-u} = e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right\}}$$

Soit $v \in]-1;1[$*. On a:*

$$\ln(1+v) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}$$

$$\textit{Donc: } \ln(1+v) - v = -\frac{v^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}$$

- *Si* $v < 0$*, on a directement:* $\ln(1+v) - v \leq -\frac{v^2}{2} \leq -\frac{v^2}{6}$
- *Si* $v \geq 0$*, le théorème des séries alternées assure que:*

$$\left|\ln(1+v) - v + \frac{v^2}{2}\right| \leq \left|\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}\right| \leq \frac{v^3}{3}$$

$$\textit{Donc: } \ln(1+v) - v \leq \frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2} \leq \frac{v^2}{3} - \frac{v^2}{2} \leq -\frac{v^2}{6}$$

$$\textit{Ainsi, si } \left|\frac{u}{x}\right| < 1, \textit{ on obtient alors: } e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right\}} \leqslant e^{-x\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{u}{x}\right)^2} \leq e^{-\frac{u^2}{6x}}$$

Donc on obtient pour tout $u \in \mathbb{R}, |f_x(u)| \leq e^{-\frac{u^2}{6x}}$

En posant $u = \sqrt{x}y$, *on obtient finalement:*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \left|f_x(\sqrt{x}y)\right| \leq e^{-\frac{y^2}{6}} \tag{3.2}$$

La fonction majorante est indépendante de x, *intégrable et positive, ce qui vérifie l'hypothèse de domination.*

De plus, on a:

$$\begin{aligned} e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right\}} &\underset{x\to+\infty}{=} e^{x\left\{\frac{y}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right\}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} e^{-\frac{y^2}{2}+o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_x(\sqrt{x}y) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

De plus, les fonctions $y \mapsto f_x(\sqrt{x}y)$ *sont mesurables sur* $\mathbb{R}$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient finalement:

$$\frac{I_x}{\sqrt{x}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}y)\mathrm{d}y \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi, d'après (3.1), *on en déduit que:*

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

■

3.2 Intégrale de Dirichlet

Théorème (Intégrale de Dirichlet - Développement 2)

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

est convergente et on peut même calculer sa valeur: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

On introduit la fonction auxiliaire suivante:

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \end{array}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer la convergence de l'intégrale.
2. Etudier F et montrer qu'elle vaut une certaine fonction usuelle que l'on précisera.
3. Etudier $\lim_{+\infty} F$ et $\lim_{0} F$ puis conclure.

Démonstration. *On rappelle que la fonction sinus cardinal est donnée par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

1. *Soit $T > 1$:* $\int_0^T \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}_{:=I_1} + \underbrace{\int_1^T \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}_{:=I_2}$

   $sinc \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *donc l'intégrale I_1 converge.*

   De plus, une intégration par parties assure que:

$$\int_1^T \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=1}^{t=T} - \int_1^T \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

   Or, $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2} \in L^1([1;+\infty[)$, donc l'intégrale I_2 converge ($T \to +\infty$).

2. $\forall t \in \mathbb{R}; \quad |\sin t| \leq |t|$ *donc $|sinc(t)| \leq 1$, d'où $sinc \in L^\infty(\mathbb{R})$. De plus, sinc est mesurable sur $[0;+\infty[$ (car régulière), et on peut constater que sur $\mathbb{R}_+^*$, F est la transformée de Laplace de sinc. Donc, en appliquant la propriété de dérivation de la transformée de Laplace, on a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et, pour tout $s > 0$:*

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+s^2}$$

   Donc, pour $A > 1 > \varepsilon > 0$, on obtient par primitivation:

$$F(A) - F(\varepsilon) = \arctan(\varepsilon) - \arctan(A) \tag{3.3}$$

3. *On sait que:*

$$F(A) = \int_0^{+\infty} e^{-At} sinc(t)\mathrm{d}t$$

   Pour tout $A > 1$, $t \mapsto e^{-At}sinc(t)$ est mesurable (car régulière), et est dominée par $t \mapsto e^{-t}$, intégrable, positive et indépendante de A. Enfin, pour presque tout $t \geq 0$ (en fait pour tout $t > 0$), $e^{-At}sinc(t) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

En vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = 0$

Les trois hypothèses nécessaires à son application étant bien vérifiées (mentionnées avent le résultat sur la limite). En passant à la limite $A \to +\infty$ *dans* 3.3*, on obtient ainsi, pour tout* $\varepsilon > 0$*:*

$$-F(\varepsilon) \quad = \quad \arctan(\varepsilon) - \frac{\pi}{2} \tag{3.4}$$

Il reste à présent à montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = F(0)$ *(en effet, on a de la régularité* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, mais on ne sait à priori rien de la continuité en* 0*). On sait que:*

$$F(\varepsilon) - F(0) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\varepsilon t} - 1\right) sinc(t)\mathrm{d}t$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}
|F(\varepsilon) - F(0)| \quad & \leq \quad \left|\int_0^1 \left(e^{-\varepsilon t} - 1\right) sinc(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_1^{+\infty} \left(e^{-\varepsilon t} - 1\right) sinc(t)\mathrm{d}t\right| \\
& \leq \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right| \mathrm{d}t + \left|\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-\varepsilon)t} - e^{it}}{t}\mathrm{d}t}_{:=I_3}\right| \\
& \underset{IPP\ sur\ I_3}{\leq} \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right| \mathrm{d}t + \left|\frac{e^{i-\varepsilon}}{i-\varepsilon} - \frac{e^i}{i}\right| + \left|\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\left(\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right)\mathrm{d}t\right| \\
& \leq \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right| \mathrm{d}t + \left|\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right| + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\left|\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le théorème de convergence dominée sur les deux intégrales, on obtient finalement:

$$|F(\varepsilon) - F(0)| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

Ainsi, dans 3.4*, le passage à la limite* $\varepsilon \to 0$ *donne ainsi:*

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

■

Partie 4

Questions lors de la présentation

4.1 Questions sur le développement

C'est le premier développement (Formule de Stirling) qui a été choisi.

Question 1: Montrer que $\frac{2}{e} < 1$:

Réponse: On peut montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 + x \leq e^x$, l'inégalité étant stricte pour $x > 0$ (on le visualise graphiquement). Il ne reste plus qu'à évaluer en 1.

Question 2: Existe-t-il une autre démonstration de la formule de Stirling sans utiliser Γ ?

Réponse: Oui, on peut utiliser les intégrales de Wallis données par:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \mathrm{d}t$$

4.2 Questions sur le plan

Question 3: Monter cette application de l'exponentielle de base quelconque:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Réponse: On considère $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$. On a ainsi:
$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{=} e^{x+o(1)}$
ce qui utilise le fait que :$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Question 4: Comment obtient-t-on le développement en série entière de la fonction arctangente ?

Réponse: On part du développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ pour $|x| < 1$, puis on remplace x par x^2. Enfin, on intègre sur $[0; x]$, sachant que l'on peut intervertir somme et intégrale du fait de la convergence normale des séries entières sur leur disque de convergence.

Question 5: Comment démontre-t-on l'holomorphie de la foncition ζ sur son domaine de définition ?

Réponse: On montre la convergence uniforme sur tout compact des sommes partielles de la série de fonctions donnés par ζ et des dérivées. La convergence uniforme préserve la régularité.

Question 6: Pourquoi avoir défini exp **sur** $\mathbb{C}$ **et** log **sur** $\mathbb{R}$ **seulement?**

Réponse: En réalité, on peut définir le logarithme sur une partie de $\mathbb{C}$ seulement, mais plusieurs définitions sont possibles. Celle-ci est l'une des plus courantes (la branche principale):

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-; \quad \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

On attend en réalité d'un logarithme complexe qu'il vérifie $exp \circ \log = Id$

Question 7: Pourquoi avoir défini ln **par une intégrale et non pas comme la réciproque de** exp **? Montrer avec cette définition que ces deux fonctions sont bien réciproques l'une de l'autre**

Réponse: Cette définition du logarithme népérien la définit comme l'unique fonction dont la dérivée est la fonction inverse et qui s'annule en 1. Les deux définitions sont ainsi indépendantes.

En ce qui concerne la seconde partie de cette question, on considère la fonction $\Phi : x \mapsto \ln(e^x)$. On a $\Phi(x) = x$. En effet, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car ln et exp le sont et on utilise la composition) de dérivée $\Phi' : x \mapsto e^x \cdot \frac{1}{e^x} = 1$. Par primitivation, on a $\Phi(x) = x + \Phi(0) = x$.

De plus, soit $\Psi : x \mapsto e^{\ln(x)}$. Toujours par composition, Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\Psi' : x \mapsto \frac{e^{\ln(x)}}{x} = \frac{\Psi(x)}{x}$. On a ainsi, pour tout $x > 0$, $\frac{x\Psi'(x) - \Psi(x)}{x^2} = 0$, soit $\left(\frac{\Psi}{x}\right)' = 0$, donc $\Psi(x) = \Psi(1)x = x$, ce qui conclut.

4.3 Exercices d'applications

Question 8: Diverses questions autour de ces deux fonctions:

$z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ et $z \mapsto \frac{e^{zx}}{e^z-1}$

Il s'agit d'étudier les pôles de la première fonction, puis un développement en série de Laurent. Les coefficients du développement en série de Laurent de la seconde fonction dépendaient de résidus de la première. Le but final de cet exercice étant de retrouver une relation portant sur les nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction ζ de Riemann en les entiers pairs positifs:

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^n}\zeta(2n)$$

Question 9: Proposer une definition de sin **sur** $\mathbb{C}$**.**

Réponse: On sait, d'après la formule d'Euler, que pour tout z réel, on a:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} + \overline{e^{iz}}}{2i}$$

La droite réelle est contenue dans l'ensemble des zéros de la différence de nos deux fonctions, donc la formule s'étend à $\mathbb{C}$ tout entier par le théorème du prolongement analytique (ou zéros isolés).

Reférences. *Voici la les références bibliographiques utilisées*

1. *Joël L.Schiff,* The Laplace Transform*, Theory and applications*

2. *Alain Yger,* Analyse complexe

3. *H. Queffélec, C. Zuily:* Analyse pour l'Agrégation. Cours et Exercices Corrigés*. 4 ème Edition, Dunod, Paris, 2013*