Lemme de Morse

Leçons 158,170,171,214,215

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul

Théorème (Lemme de Morse)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ et $x_0 \in U$ un point critique non dégénéré de f. Alors il existe un difféomorphisme local $\varphi : V \longrightarrow W$ où $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ tel que, pour tout $u \in W$,

$$\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(u) \quad = \quad f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} u_k^2 - \sum_{k=p+1}^{n} u_k^2$$

où $u = \varphi(x)$ et $p \in [\![1, n]\!]$ ne dépend que de f et de x_0. La signature de $d^2 f(x_0)$ (en tant que forme quadratique) est $(p, n-p)$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer un lemme de caractérisation de V par $\varphi(A) = A^T A_0 A$ où $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.
2. Conclure à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral en se ramenant à $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.

Lemme

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Alors, ils existent $V \in \mathcal{V}(A_0)$, $W \in \mathcal{V}(I_n)$ ainsi que $\psi : V \longrightarrow W$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, où $W \subset GL_n(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $A \in V$, $A = \psi(A)^T A_0 \psi(A)$.

Démonstration. *Soit l'application:*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T A_0 A \end{array}$$

On a: $\phi(I_n + H) = (I_n + H)^T A_0 (I_n + H) = A_0 + H^T A_0 + A_0 H + H^T A_0 H$ *où* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc ϕ *est différentiable en* I_n*, de différentielle donnée par:*

$$d\phi(I_n) \cdot H = (A_0 H)^T + A_0 H$$

$$\textit{Ainsi } H \in \ker(d\phi(I_n)) \Leftrightarrow A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow H \in A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Comme on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a donc cette décomposition en somme directe:*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Posons alors $\Phi = \phi|_{A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$. *Ainsi,* $d\Phi : A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *est injective. Par un argument de dimension, on a la surjectivité. Donc l'application est une bijection. En vertu du théorème d'inversion locale, ils existent* $V \in \mathcal{V}_{A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A_0)$, $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(I_n)$, $\psi : V \longrightarrow W$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *tels que, pour tout* $A \in V$, $A = (\Phi \circ \psi)(A) = \psi(A)^T A_0 \psi(A)$. *Quitte à réduire* V, *on peut supposer que* $W \in GL_n(\mathbb{R})$.

■

On peut maintenant démontrer le théorème:

Démonstration. *Quitte à translater, on peut supposer que* $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$ *et* $f(x_0) = 0$. *De plus, la formule de Taylor avec reste intégral assure que, pour tout* $x \in U$,

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{df(0)}_{=0 \text{ (point critique)}} \cdot x + \int_0^1 (1-t) x^T d^2 f(x) x \mathrm{d}t$$

$$\textit{Ainsi, on a:} \quad f(x) = x^T Q(x) x \ \textit{où}\ Q(x) = \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) \mathrm{d}t$$

$$\textit{De plus, } Q(0) = \int_0^1 (1-t) d^2 f(0) \mathrm{d}t = d^2 f(0) \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} d^2 f(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$$

En effet, par le théorème de Schwartz, $d^2 f(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *puisque* $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ *et* $d^2 f(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ *puisque le point critique en question est non-dégénéré.*

Par le lemme, ils existent $\Omega_1 \in \mathcal{V}(Q(0))$, $\Omega_2 \in \mathcal{V}(I_n)$, $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *tels que, pour tout* $A \in \Omega_1$, $A = \psi(A)^T Q(0) \psi(A)$, *avec* $\Omega_2 \subset GL_n(\mathbb{R})$, Ω_1, Ω_2 *ouverts.*

Par continuité de Q, *il existe* $\Omega_3 \in \mathcal{V}(0)$ *tel que, pour tout* $x \in \Omega_3$, $Q(x) = \psi(Q(x))^T Q(0) \psi(Q(x))$. *Or,* $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f(0)$ *est de signature* $(p, n-p)$, *donc, par le théorème d'inertie de Sylvester, il existe* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $x \in \Omega_3$,

$$Q(x) = \psi(Q(x))^T P^T \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} P \psi(Q(x))$$

$$\textit{Donc, pour tout } x \in \Omega_3, \quad f(x) = x^T \psi(Q(x))^T P^T \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} P \psi(Q(x)) x$$

$$\textit{Soit l'application:} \quad \begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & P \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} P \psi(Q(x)) x \end{array}$$

f *est de classe* $\mathcal{C}^3$ *sur* Ω_3. *Par composition,* φ *est bien de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω_3 *et on a:* $d\varphi(0) : h \longmapsto P\psi(Q(0)) h$. *Or,* $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \subset GL_n(\mathbb{R})$ *donc* $P\psi(Q(0)) \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $d\varphi(0)$ *est inversible.*

En vertu du théorème d'inversion locale, ils existent $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ *des ouverts, où* $V \subset \Omega_3$, *tels que* $\varphi : V \longrightarrow W$ *soit un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme.*

En posant $u = \varphi(x)$, *on a, pour tout* $u \in W$,

$$\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(u) \quad = \quad u^T \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} u$$

Ce qui conclut.

■

Remarque. *Le lemme de Morse permet de déterminer la nature d'un point critique d'une fonction et d'affirmer que, autour de ce point critique, "la fonction est difféomorphe à une forme quadratique". Par exemple, dans le cas* $n = 2$, *pour une surface paramétrée par la fonction* $z = f(x, y)$, *on a trois types de points critiques non-dégénérés qui apparaissent: maximum local (signature* $(-1, -1)$*), minimum local (signature* $(1, 1)$*) ou point selle (signature* $(1, -1)$*), et, en plus, la surface y sera difféomorphe à une surface paramétrée respectivement par* $a - x^2 - y^2$, $a + x^2 + y^2$ *ou* $a + x^2 - y^2$, *où* a *est la valeur de* f *en le point critique.*