Méthode de Newton

Leçons 223,226

Théorème (Méthode de Newton)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\underline{x}) = 0$ et $f'(\underline{x}) \neq 0$. Alors:

1. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $u \in [\underline{x}-\varepsilon, \underline{x}+\varepsilon]$, $f'(u) \neq 0$
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

   Alors, si ε est assez petit et $|x_0 - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \underline{x}| \leqslant C|x_n - \underline{x}|^2$ et $|x_n - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$. On parle alors de convergence quadratique (dans le cas $C < 1$).

3. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et $f'(\underline{x}) > 0$, alors, pour tout $x_0 \geqslant \underline{x}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge de manière quadratique vers $\underline{x}$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le premier point (évident par continuité de f').
2. Raisonner par récurrence en utilisant un développement limité de f autour de x_n.
3. Montrer le résultat pour une fonction convexe en utilisant les propriétés des dérivées d'une fonction convexe.

Démonstration. *1. $f'(\underline{x}) \neq 0$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$ (elle y est même de classe $\mathcal{C}^1$). En supposant que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $u \in [\underline{x}-\varepsilon, \underline{x}+\varepsilon] \setminus \{\underline{x}\}$, $f'(u) = 0$, la continuité de f' implique donc, par passage à la limite $u \to \underline{x}$, que $f'(\underline{x}) = 0$, ce qui est absurde. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [\underline{x}-\varepsilon, \underline{x}+\varepsilon]$, $f'(u) \neq 0$.*

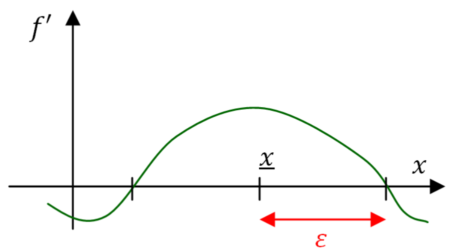

Figure 1: Illustration de première propriété.

2. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \underline{x}| \leqslant C|x_n - \underline{x}|^2$ et $|x_n - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

$\star$ ***Initialisation:*** *Par hypothèse, on a $|x_0 - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$.*

⋆ ***Hérédité:*** *Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, que l'on aie $|x_n - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$, avec x_n bien définie. Alors x_{n+1} est également bien défini. Comme on a $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n)$, on obtient ainsi, puisque $f(\underline{x}) = 0$,*

$$x_{n+1} - \underline{x} \quad = \quad x_n - \underline{x} - f'(x_n)[f(x_n) - f(\underline{x})]$$

Or, un développement de Taylor (formule de Taylor-Lagrange) de f autour de x_n assure que, puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f(\underline{x}) \quad = \quad f(x_n) + f'(x_n)(\underline{x} - x_n) + \frac{1}{2}f''(\zeta_n)(\underline{x} - x_n)^2$$

où $\zeta_n \in [\underline{x}, x_n]$.

$$\textit{Ainsi, on a:} \quad f(x_n) = f(x_n) - f(\underline{x}) = f'(x_n)(x_n - \underline{x}) - \frac{1}{2}f''(\zeta_n)(\underline{x} - x_n)^2$$

$$\textit{Donc:} \quad x_{n+1} - \underline{x} = x_n - \underline{x} - f'(x_n)^{-1}\left[f'(x_n)(x_n - \underline{x}) - \frac{1}{2}f''(\zeta_n)(\underline{x} - x_n)^2\right]$$

$$\textit{Finalement, on a cette égalité:} \quad x_{n+1} - \underline{x} = \frac{1}{2}f'(x_n)f''(\zeta_n)(x_n - \underline{x})^2$$

$$\textit{Soit alors, en valeur absolue:} \quad |x_{n+1} - \underline{x}| = \frac{1}{2}|f'(x_n)|^{-1}|f''(\zeta_n)||x_n - \underline{x}|^2$$

$$\textit{En posant} \quad C = \frac{\max\limits_{x \in [\underline{x}-\varepsilon, \underline{x}+\varepsilon]}|f''(x)|}{\min\limits_{x \in [\underline{x}-\varepsilon, \underline{x}+\varepsilon]}|f'(x)|} \quad \textit{on a ainsi} \quad |x_{n+1} - \underline{x}| \leqslant C|x_n - \underline{x}|^2 \leqslant C\varepsilon^2$$

Si on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $C\varepsilon < 1$, on a: $|x_{n+1} - \underline{x}| \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut la récurrence.

3. *Si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et si $f'(\underline{x}) > 0$, alors, pour tout $x \geqslant \underline{x}$, $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $\zeta_n \in [\underline{x}, x_n]$ tel que:*

$$x_{n+1} - \underline{x} \quad = \quad \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \underline{x})^2 > 0 \tag{1}$$

puisque $f'' > 0$ et $f' > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n - \underline{x} \geqslant x_{n+1} - \underline{x} > 0$. La suite $(x_n - \underline{x})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc converge vers une limite x^* vérifiant $x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$, soit $f(x^*) = 0$, d'où $x^* = \underline{x}$. De plus, l'égalité (1) assure toujours une convergence quadratique.

■

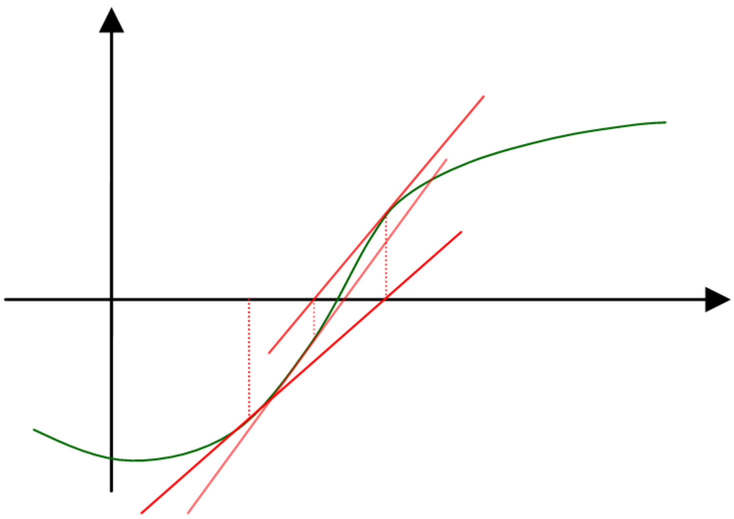

Figure 2: Illustration des trois premières itérations de la méthode de Newton sur une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, du plus foncé au plus clair.

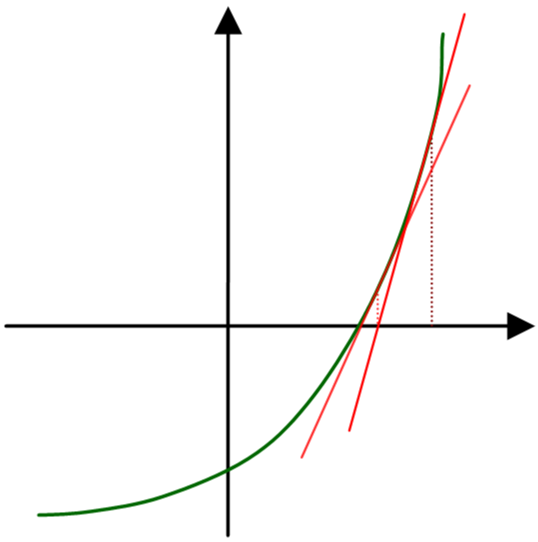

Figure 3: Illustration des trois premières itérations de la méthode de Newton sur une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, du plus foncé au plus clair.

Remarque. *La convergence quadratique est très rapide, cependant, si $C > 1$, la divergence peut être assez surprenante (i.e. très rapide elle aussi). En général, on s'approche du $\underline{x}$ par dichotomie, puis on finit le travail avec la méthode de Newton. Les figures 2 et 3 illustrent bien la rapidité de la convergence.*

Reférence. *G.Allaire, Analyse numérique et optimisation*