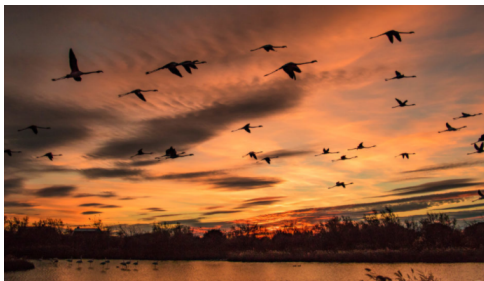


Comportement global de N espèces en compétition avec Diffusion forte



Soutenance de Séminaire - Lundi 4 Janvier 2021

Maxime BOUCHEREAU
Séminaire encadré par François CASTELLA
Université Rennes 1

- Modélisation et résultat principal
 - Modélisation du problème
 - Un théorème d'existence et d'unicité
- Étude du système d'EDP
 - Décomposition en système *slow-fast*
 - Théorème de la variété centrale
 - Étude des solutions stationnaires
 - Principe d'exclusion compétitif (CEP)
- Simulations numériques
 - Choix des paramètres
 - Schéma numérique
 - Illustration du CEP

Partie 1 : Modélisation et résultat principal

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert lisse, borné. On considère le système d'EDP suivant:

$$(S_\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial t} = I - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} f_i(\cdot, R^\varepsilon) V_i^\varepsilon - m_0 R^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_x \left(a_0 \vec{\nabla}_x R^\varepsilon \right) \\ \text{sur } \Omega \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \frac{\partial V_i^\varepsilon}{\partial t} = (f_i(\cdot, R^\varepsilon) - m_i) V_i^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_x \left(a_i \vec{\nabla}_x V_i^\varepsilon \right) \\ \text{sur } \Omega \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} R^\varepsilon = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_i^\varepsilon = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ R^\varepsilon(\cdot, 0) = R^0 \geq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, V_i^\varepsilon(\cdot, 0) = V_i^0 \geq 0 \end{array} \right.$$

Remarque

En changeant V_i^ε en $\frac{1}{\lambda_i} V_i^\varepsilon$, on peut supposer que $\lambda_i = 1$.

Modélisation et résultat principal

Un théorème d'existence et d'unicité

On introduit le quadrant positif de $C^0(\overline{\Omega})^{N+1}$ par:

$$Q = \{V \in C^0(\overline{\Omega}) : \forall x \in \overline{\Omega}, V(x) \geq 0\}^{N+1}$$

Théorème ((Existence et unicité de solution - Admis))

Si $(R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon)(\cdot, 0) \in Q$ est une condition initiale au système (S_ε) , alors il existe une unique solution $(R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon) \in C^1([0, +\infty[, Q)$

Partie 2 : Étude du système d'EDP

Définition

- On pose, pour tous $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$:

$$W^\varepsilon(x, t) = (R^\varepsilon(x, t), V_1^\varepsilon(x, t), \dots, V_N^\varepsilon(x, t))$$

- On définit l'application linéaire suivante:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (f_0, \dots, f_N) &\longmapsto \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_0(x) dx, \dots, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_N(x) dx \right) \end{aligned}$$

Proposition

En notant $E = \mathbb{R}^{N+1}$ et $F = \ker(\varphi)$, on a:

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^{N+1} = E \oplus F$$

- $X^\varepsilon(\cdot, t) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, t))$ (évolution des valeurs moyennes de $R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon$ sur Ω , se déroulant sur de grandes échelles de temps - *slow*)
- $Y^\varepsilon(\cdot, t) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, t))$ (phénomènes de déroulant sur de courtes échelles de temps - *fast*)
- $K = \text{diag} \left(\text{div}_x(a_0 \vec{\nabla}_{x \cdot}), \text{div}_x(a_1 \vec{\nabla}_{x \cdot}), \dots, \text{div}_x(a_N \vec{\nabla}_{x \cdot}), \right)$

- $$\mathcal{F}(x, W^\varepsilon) = \begin{bmatrix} I - m_0 R^\varepsilon - \sum_{i=1}^N V_i^\varepsilon f_i(x, R^\varepsilon) \\ (f_1(x, R^\varepsilon) - m_1) V_1^\varepsilon \\ \vdots \\ (f_N(x, R^\varepsilon) - m_N) V_N^\varepsilon \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{F}_0(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) = \Pi_E \mathcal{F}(x, W^\varepsilon)$
- $\mathcal{G}_1(x, X^\varepsilon, Y^\varepsilon) = \Pi_F \mathcal{F}(x, W^\varepsilon)$

$$(S_\varepsilon^{sf}) : \begin{cases} \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t} = \mathcal{F}_0(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \\ \frac{\partial Y^\varepsilon}{\partial t} = \mathcal{G}_1(x, X^\varepsilon, Y^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} K Y^\varepsilon \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} X^\varepsilon = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} Y^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ X^\varepsilon(\cdot, 0) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \\ Y^\varepsilon(\cdot, 0) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \end{cases}$$

Objectif: Étude du comportement des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème (Théorème de la variété centrale - Admis)

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction $h \in C^1(E \times [0, \varepsilon_0], F)$ tels que:

$$\|h(\cdot, \varepsilon)\|_{L^\infty(E, F)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le système (S_ε^{sf}) peut-être approché par ce système:

$$(S_\varepsilon^{[\infty]}) : \begin{cases} \frac{dX^{[\infty], \varepsilon}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[\infty], \varepsilon}, h(X^{[\infty], \varepsilon}, \varepsilon)) \\ Y^{[\infty], \varepsilon} = h(X^{[\infty], \varepsilon}, \varepsilon) \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} X^{[\infty], \varepsilon} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} Y^{[\infty], \varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ X^{[\infty], \varepsilon}(\cdot, 0) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \\ Y^{[\infty], \varepsilon}(\cdot, 0) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \end{cases}$$

Théorème (suite)

avec convergence exponentiellement rapide vers la variété centrale, c'est-à-dire que pour toute condition initiale, ils existent $\mu, C > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$:

$$\|Y^\varepsilon(\cdot, t) - h(X^\varepsilon(\cdot, t), \varepsilon)\|_F \leq C e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}}$$

où $\|(u_0, \cdot, u_N)\|_F = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \dots + \|u_N\|_{L^\infty(\Omega)}$

Remarque

S'adapte au cas où $C^0(\overline{\Omega})^{N+1}$, E et F sont remplacés par des espaces de Banach quelconques, respectivement B , E_0 et F_0 , avec $B = E_0 \oplus F_0$.

Exemple

$B = \mathbb{R}^2$, $E_0 = F_0 = \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -\frac{1}{\varepsilon} y \end{cases}$$

En notant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, on a, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t x_0 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (e^t - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}) y_0 \\ e^{-\frac{t}{\varepsilon}} y_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} e^t x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a $h = 0$ et la variété centrale est $\text{Vect} \{(1, 0)\}$.

Étude du système d'EDP

Théorème de la variété centrale

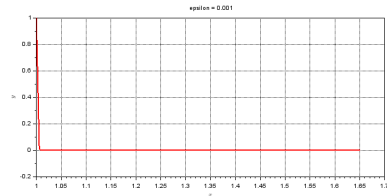
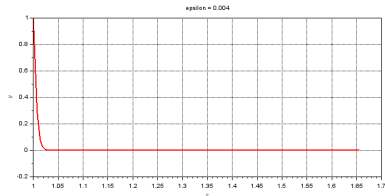
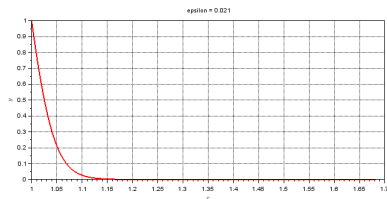
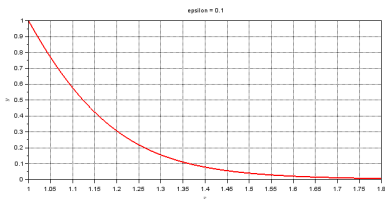


Figure: Simulations numériques de l'exemple précédent pour de petites valeurs de ϵ .

Étude de cette EDO:

$$(S_\varepsilon^c) : \frac{dX^{[\infty],\varepsilon}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[\infty],\varepsilon}, h(X^{[\infty],\varepsilon}, \varepsilon))$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, première approximation (système agrégé) :

$$(S_0^c) : \frac{dX^{[0]}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[0]}, 0)$$

Comprendre les solutions de (S_0^c) permet de comprendre les solutions de (S_ε) :

$$(S_0^c) \xrightarrow[\text{approximation}]{\text{Première}} (S_\varepsilon^c) \leftrightarrow (S_\varepsilon^{[\infty]}) \xrightarrow[\text{variété centrale}]{\text{Th. de la}} (S_\varepsilon^{sf}) \leftrightarrow S_\varepsilon$$

Variation moyenne des ressources et de chaque population:

$$(S_0^c) : \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \tilde{I} - \tilde{m}_0 r - \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i(r) u_i \\ \frac{du_i}{dt} = (\tilde{f}_i(r) - \tilde{m}_i) u_i \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I(x) dx, \quad \tilde{m}_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_0(x) dx$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \tilde{m}_i = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_i(x) dx, \quad \tilde{f}_i(r) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_i(x, r) dx$$

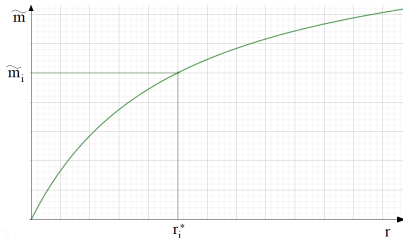
Définition

On définit $r_0^* = \frac{\tilde{I}}{\tilde{m}_0}$ et, comme, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, \tilde{f}_i est croissante, on pose:

$$r_i^* = \begin{cases} \tilde{f}_i^{-1}(\tilde{m}_i) & \text{si } \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(r) > m_i \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose également:

- $p_0^* := (r_0^*, 0, \dots, 0)$
- Si $r_0^* > r_i^*$, $p_i^* := (r_0^*, 0, \dots, 0, u_i^*, 0, \dots, 0)$, où $u_i^* := \frac{\tilde{m}_0}{\tilde{m}_i} (r_0^* - r_i^*) > 0$.



Proposition (Stabilité des solutions stationnaires de (S_0^c))

- Si, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_0^* < r_i^*$, alors le système (S_0^c) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N + 1)$ -uplet p_0^* , qui est asymptotiquement stable.
- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que $r_i^* < r_0^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket \setminus \{i\}$, $r_i^* < r_j^*$. Alors le système (S_0^c) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N + 1)$ -uplet p_i^* , qui est asymptotiquement stable.
- Si, pour tout $i \neq j$, $r_i^* \neq r_j^*$, et $r_i^* < r_0^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors le système (S_0^c) a exactement $N + 1$ solutions stationnaires positives qui sont les p_i^* , pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, exactement l'une d'entre elles est stable, c'est $p_{i_0}^*$, où $r_{i_0}^* = \min(r_0^*, \dots, r_N^*)$.

Théorème (Stabilité des solutions stationnaires de (S_ε))

Ils existent $C, \varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

- Si, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_0^* < r_i^*$, alors le système (S_ε) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N + 1)$ -uplet $W_0^\varepsilon(x) = (R_0^\varepsilon(x), 0, \dots, 0)$, qui est stable et vérifie:

$$\|R_0^\varepsilon - r_0^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que $r_i^* < r_0^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket \setminus \{i\}$, $r_i^* < r_j^*$. Alors le système (S_ε) admet (au moins) une solution stationnaire positive $W_i^\varepsilon(x) = (R_i^\varepsilon(x), 0, \dots, 0, U_i^\varepsilon(x), 0, \dots, 0)$ qui est stable et vérifie:

$$\|R_i^\varepsilon - r_i^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|U_i^\varepsilon - u_i^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

- Si, pour tout $i \neq j$, $r_i^* \neq r_j^*$, et $r_i^* < r_0^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors le système (S_ε) a exactement $N + 1$ solutions stationnaires positives qui sont les W_i^ε , pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, exactement l'une d'entre elles est stable, c'est $W_{i_0}^\varepsilon$, où $r_{i_0}^* = \min(r_0^*, \dots, r_N^*)$.

Principe d'Exclusion Compétitif (CEP): Une ou plusieurs espèces s'éteignent à la suite de leur compétition avec d'autres espèces pour une unique ressource.

Hypothèses:

- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 > 0$
- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\tilde{f}_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}$ où c_i et k_i sont des constantes positives.

Proposition (CEP pour le système (S_0^c) - Admis)

Supposons les hypothèses précédentes vérifiées. Soit $(r(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$ une solution de (S_0^c) dont les conditions initiales sont positives. On définit l'ensemble:

$$J = \{0\} \cup \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket : u_j(0) > 0, r_j^* < r_0^*\}$$

et le nombre $\hat{r} = \min_{j \in J} (r_j^*)$. On a:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = \hat{r}$ et, pour tout $i \notin J$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_i(t) = 0$
- Si, pour $j_1 \in J \setminus \{0\}$, on a $r_{j_1}^* < r_j^*$ pour tout $j \in J \setminus \{j_1\}$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{j_1}(t) = u_{j_1}^* \text{ et } \forall j \in J \setminus \{0, j_1\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} u_j(t) = 0$$

Hypothèses supplémentaires:

- Pour tous $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $x \in \Omega$, on a $\tilde{m}_i(x) = \tilde{m}_0(x) > 0$
- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $f_i(x, R) = \frac{C_i(x)R}{k_i + R}$, où k_i est une constante positive. On a alors $\tilde{f}_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}$ avec:

$$c_i = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} C_i(x) dx$$

Théorème (CEP pour le système (S_ε))

Supposons les hypothèses précédentes vérifiées. Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, notons $W_i^\varepsilon(x)$ la solution stationnaire de (S_ε) introduite au théorème précédent. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, et pour toute condition initiale $W^\varepsilon(\cdot, 0) \in Q$, on a les propriétés suivantes:

- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Si $r_i^* > r_0^*$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U_i^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

- Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_0^* < r_i^*$. Alors toute solution $W^\varepsilon(x, t)$ de (S_ε) vérifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|W^\varepsilon(\cdot, t) - W_0^\varepsilon\|_{L^\infty} = 0$$

- Supposons que pour tout $i \neq 1$, $r_1^* < r_i^*$. Alors toute solution $W^\varepsilon(x, t)$ de (S_ε) avec condition initiale positive vérifiant $U_1^\varepsilon(x, 0) > 0$ pour un certain $x \in \Omega$ vérifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|W^\varepsilon(\cdot, t) - W_1^\varepsilon\|_{L^\infty} = 0$$

Partie 3 : Simulations numériques

- Simulation du système (S_ε) sur le cercle \mathbb{S}^1 (conditions périodiques au bord)
- $N = 3$ espèces
- $\varepsilon = 10^{-3}$
- I est constante égale à 1.
- $m_0 = \dots = m_N$ est une fonction constante égale à 1.
- $a_0 = \dots = a_N$ est une fonction constante égale à 1.

- $$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall r \geq 0, f_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}, \quad c_i > m_i, k_i > 0 \text{ constantes}$$

$$r_0^* = 1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, r_i^* = \frac{m_i k_i}{c_i - m_i} = \frac{k_i}{c_i - 1}$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad R^\varepsilon(x, 0) = e^{-20(x-0.5)^2} \quad ; \quad U_1^\varepsilon(x, 0) = e^{-100(x-0.25)^2}$$
$$U_2^\varepsilon(x, 0) = e^{-100(x-0.5)^2} \quad ; \quad U_3^\varepsilon(x, 0) = e^{-100(x-0.75)^2}$$

- Durée de simulation: $T = 10$

- h_x : Pas de subdivision en espace
- h_t : Pas de subdivision en temps
- R_j^n : Approximation de $R^\varepsilon(jh_x, nh_t)$
- $(U_i)_j^n$: Approximation de $V_i^\varepsilon(jh_x, nh_t)$

$$\frac{R_j^{n+1} - R_j^n}{h_t} = I - \sum_{i=1}^N f_i(R_j^n)(U_i)_j^n - m_0 R_j^n + \frac{R_{j+1}^{n+1} - 2R_j^{n+1} + R_{j-1}^{n+1}}{\varepsilon h_x^2}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

$$\frac{(U_i)_j^{n+1} - (U_i)_j^n}{h_t} = I - (f_i(R_j^n) - m_i)(U_i)_j^n + \frac{(U_i)_{j+1}^{n+1} - 2(U_i)_j^{n+1} + (U_i)_{j-1}^{n+1}}{\varepsilon h_x^2}$$

Proposition

Le schéma numérique est consistant d'ordre de consistance 2 en espace et 1 en temps.

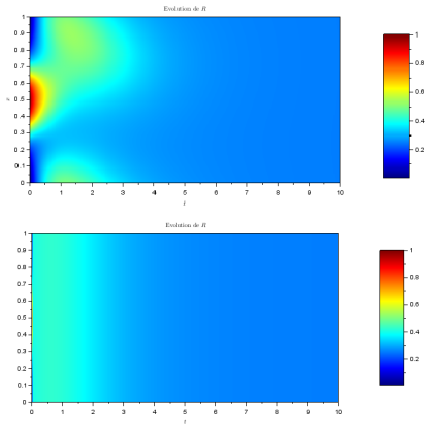


Figure: Simulation du système (S_ε) , en particulier de R^ε , pour $\varepsilon = 100$ (en haut) et $\varepsilon = 10^{-3}$ (en bas).

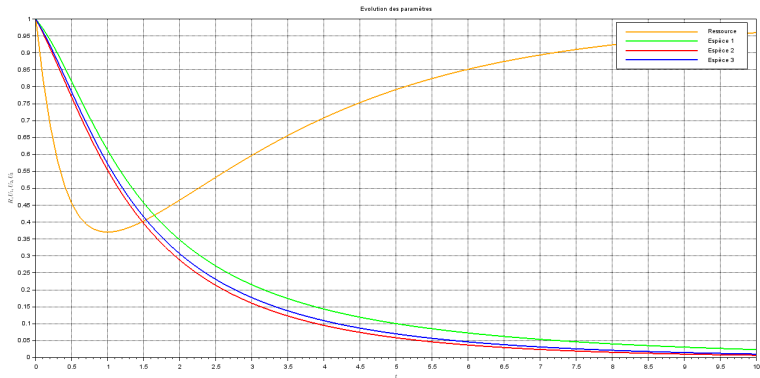


Figure: Simulation du système (S_0^c) .

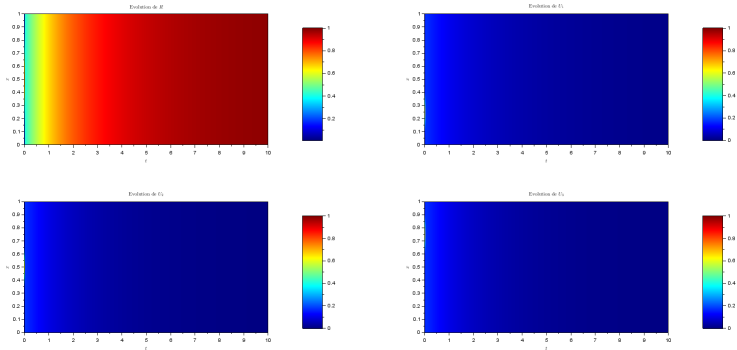


Figure: Simulation du système (S_ε) .

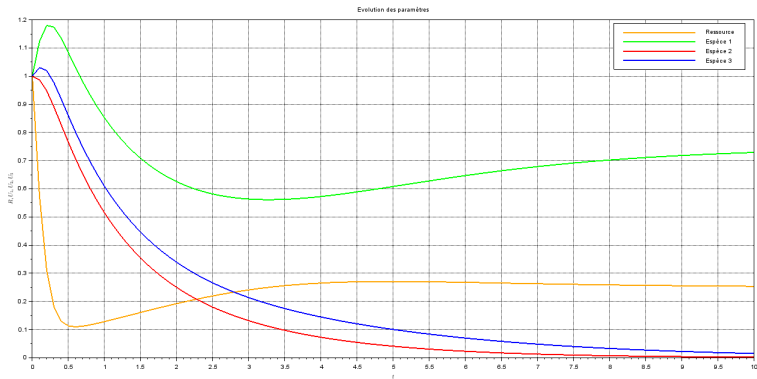


Figure: Simulation du système (S_0^c).

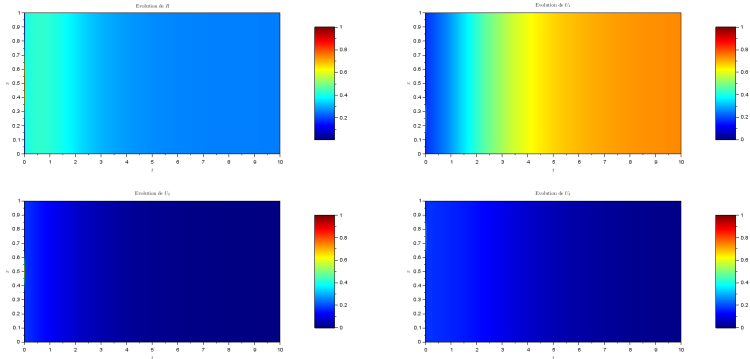


Figure: Simulation du système (S_ϵ) .