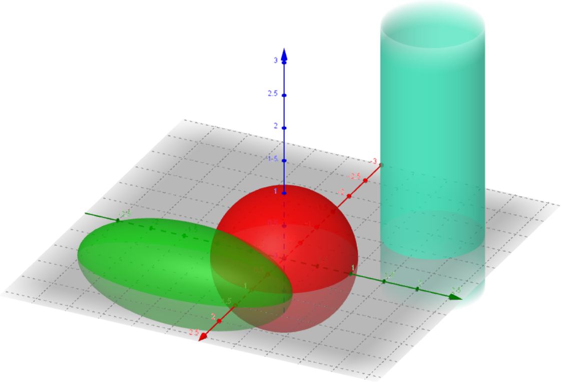
Soutenance de TER - Géométrie semi-algébrique - Jeudi 23 Mai 2019



Gaëlle Richet et Maxime Bouchereau - Université Rennes 1

Partie 1 : Ensembles semi-algébriques

Définition

*Les **sous-ensembles semi-algébriques** de $\mathbb{R}^n$ forment la plus petite classe $\mathcal{SA}_n$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ telle que :*

- *Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\{x \in \mathbb{R}/P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n$ et $\{x \in \mathbb{R}^n/P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n$.*
- *Si $A \in \mathcal{SA}_n$ et $B \in \mathcal{SA}_n$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $\mathbb{R}^n \backslash A$ sont dans $\mathcal{SA}_n$.*

Théorème

Tarski-Seidenberg - première version *Soient A un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Alors $\pi(A)$ est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire

Si A est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$, son adhérence $\overline{A}$ dans $\mathbb{R}^n$ est aussi semi-algébrique.

Définition

*Une **formule du premier ordre** (du langage des corps ordonnés à paramètres dans $\mathbb{R}$) est une formule obéissant aux règles suivantes :*

1. *Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, alors $P = 0$ et $P > 0$ sont des formules du premier ordre.*
2. *Si ϕ et ψ sont des formules du premier ordre, alors "Φ et Ψ", "Φ ou Ψ" et "non Φ" sont des formules du premier ordre.*
3. *Si Φ est une formule et X une variable sur $\mathbb{R}$, alors $\exists X \Phi$ et $\forall X \Phi$ sont des formules du premier ordre.*

Théorème

Tarski-Seidenberg - deuxième version
Si $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ est une formule du premier ordre, l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n)$ qui satisfont $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ est semi-algébrique.

Corollaire (Rappel)

Si A est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$, son adhérence $\overline{A}$ dans $\mathbb{R}^n$ est aussi semi-algébrique.

Partie 2 : Décomposition d'un ensemble semi-algébrique

Définition

Une décomposition algébrique cylindrique *(notée CAD) de $\mathbb{R}^n$ est une suite $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ où pour $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathcal{C}_k$ est une partition finie de $\mathbb{R}^k$ en ensembles semi-algébriques.*

Décomposition d'un ensemble semi-algébrique

Un exemple de CAD adaptée

$\Delta_1 : x = 1$

$\mathrm{ID} : x^2 + y^2 < 1$

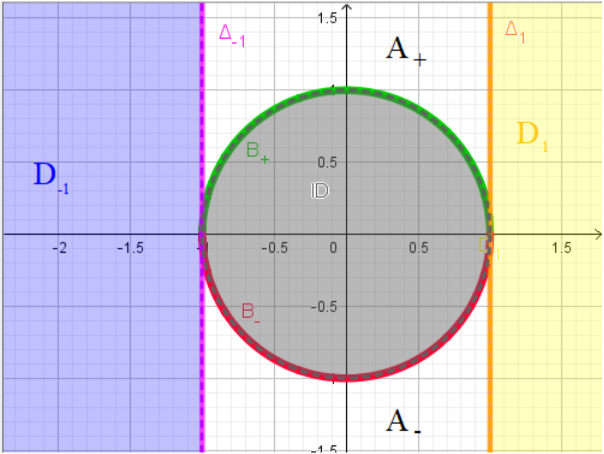
$B_+ : y = \sqrt{1 - x^2}$

$B_- : y = -\sqrt{1 - x^2}$

$\Delta_{-1} : x = -1$

$D_{-1} : x < -1$

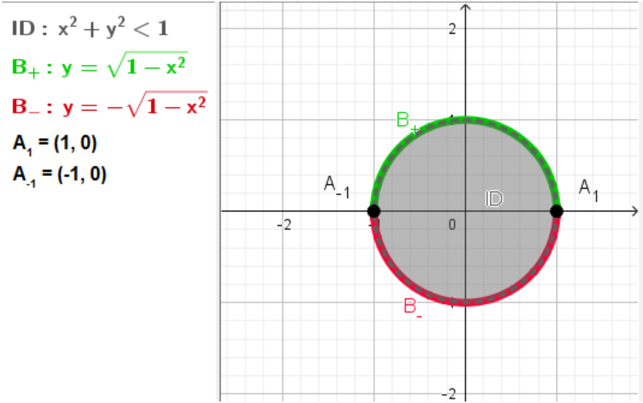
$D_1 : x > 1$



Proposition

Soit $S \in \mathcal{SA}_n$. *Alors il est possible de décomposer* S *de cette manière :*

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{p} C_i$$

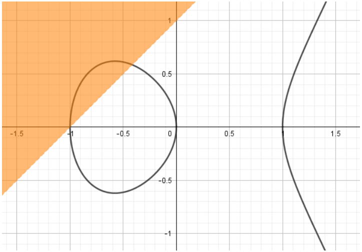


ID : $x^2 + y^2 < 1$
$B_+ : y = \sqrt{1 - x^2}$
$B_- : y = -\sqrt{1 - x^2}$
$A_1 = (1, 0)$
$A_{-1} = (-1, 0)$
B_+
A_{-1}
ID
A_1
B_-
2
-2
0
-2

Théorème

Tout ensemble semi-algébrique est localement connexe et a un nombre fini de composantes connexes semi-algébriques.

Merci pour votre attention !



Partie 3 : Triangulation

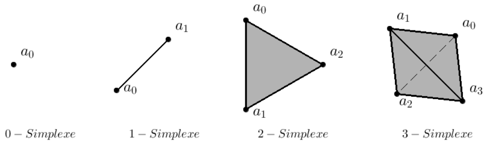
Definition

Soient $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$ $d+1$ points indépendants de manière affine. le **d-simplexe** de sommets $a_0, \dots, a_d$ est l'ensemble :

$$\sigma = [a_0, \dots, a_d] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in [0,1] : \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i \right\}$$

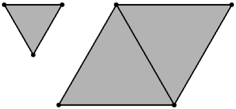
Le **simplexe ouvert correspondant** est :

$$\overset{o}{\sigma} = (a_0, \dots, a_d) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in]0,1[: \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i \right\}$$

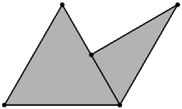


Définition

Un ***complexe simplicial fini*** *de* $\mathbb{R}^n$ *est une collection* $K = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ *de simplexes* $\sigma_j \subset \mathbb{R}^n$ *telle que pour tout* $\sigma_i, \sigma_j \in K$ *tel que* $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$, $\sigma_i \cap \sigma_j$ *est une face commune de* σ_i *et* σ_j.



Un complexe simplicial



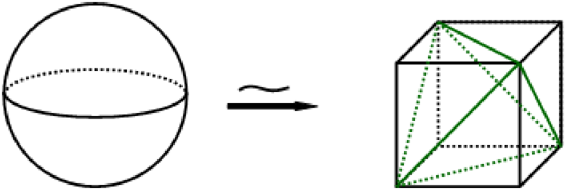
Pas un complexe simplicial

Théorème (Triangulation d'ensembles semi-algébriques compacts)

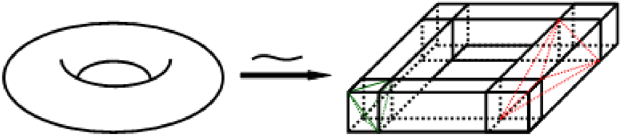
Soit $S \in \mathcal{SA}_n$ un ensemble semi-algébrique compact. Il existe un complexe simplicial K et un homéomorphisme semi-algébrique $h : K \longrightarrow S$

Triangulation

Triangulation d'ensembles semi-algébriques compacts (exemples)



$\mathbb{S}^2$



$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \simeq \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$$

Théorème (Lemme de sélection des courbes)

Soient $S \in \mathcal{SA}_n$ *et* $x \in \overline{S} \backslash S$. *Il existe une application continue* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que* $\gamma(0) = x$ *et* $\gamma\left(]0,1]\right) \subset S$