Densité des polynômes orthogonaux

Leçons 209,213,234,239,250

Définition (Un espace de fonctions L^2 avec une fonction poids)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable. On définit l'espace $L^2(I,\rho)$ par:

$$L^2(I,\rho) \quad = \quad \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable} : \int_I |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

ρ est alors appelée fonction poids.

Théorème (Densité des polynômes orthogonaux)

On munit l'espace $L^2(I,\rho)$ du produit scalaire suivant:

$$\langle f|g\rangle_\rho \quad = \quad \int_I f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

On a alors les résultats suivants:

1. Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x \quad < \quad +\infty \tag{1}$$

alors la famille $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$, i.e. on a:

$$L^2(I,\rho) \quad = \quad \overline{Vect\{P_n, n \in \mathbb{N}\}}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Se ramener au cas $P_n = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En se ramenant au cas précédent, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \langle f|x^n\rangle_\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \tag{2}$$

en passant par une transformée de Fourier et en montrant l'holomorphie de celle-ci via le théorème d'holomorphie sous le signe intérgal. On aura alors $Vect\{P_n, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ i.e. la propriété demandée.

Démonstration. *1. On peut se ramener au cas $P_n = X^n$ en orthogonalisant ensuite via l'algorithme de Gram-Schmidt, puisque $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ est échelonnée en degré, on a bien:*

$$Vect\,\{X^n, n \in \mathbb{N}\} \quad = \quad Vect\,\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$$

2. Montrons l'implication (2).

Soit $f \in L^2(I, \rho)$. Posons $\varphi = \mathbf{1}_I f\rho$. $\varphi \in L^1(I)$. En effet, on a:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_I |f(x)\rho(x)|\mathrm{d}x \\ &\underset{|t|\leq\frac{1}{2}(1+t^2)}{\leq} \quad \frac{1}{2}\int_I \rho(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\end{aligned}$$

La première intégrale est convergente par l'hypothèse 1 du théorème, et la seconde est aussi convergente par l'hypothèse $f \in L^2(I, \rho)$. On peut donc définir la transformée de Fourier de φ:

$$\hat{\varphi}(\eta) \;\; = \;\; \int_I f(x)\rho(x)e^{-i\eta x}\mathrm{d}x$$

On pose $B_\alpha := \left\{z \in \mathbb{C} : Im(z) < \frac{1}{2}\alpha\right\}$, où α est défini dans l'hypothèse (1) du théorème. B_α est un ouvert de $\mathbb{C}$. On définit la fonction F par:

$$\forall z \in B_\alpha \quad , \quad F(z) = \int_I f(x)\rho(x)e^{izx}\mathrm{d}x$$

Montrons que F est holomorphe sur B_α:

- Soient $z \in B_\alpha$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned}\left|e^{izx}f(x)\rho(x)\right| \quad &= \quad e^{Im(z)x}|f(x)|\rho(x) \\ &\leq \quad e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)\end{aligned} \tag{3}$$

Donc $x \mapsto e^{izx}f(x)\rho(x)$ est intégrable pour tout $z \in B_\alpha$

- Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto e^{izx}f(x)\rho(x)$ est holomorphe sur B_α

- On a:

$$\int_I e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x \underset{\textit{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Par l'inégalité (3), on a une majoration indépendante du paramètre z donc en vertu du théorème d'holomorphie sous le signe intégral, F est holomorphe sur B_α et, pour tous $z \in B_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(z) = i^n \int_I x^n f(x)\rho(x)e^{izx}\mathrm{d}x$$

Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F^{(n)}(0) &= i^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x \\ &= i^n \langle f | x^n \rangle_\rho \\ &= 0 \text{ (hypothèse)} \end{aligned}$$

F étant holomorphe sur B_α, on a: F identiquement nulle sur B_α. En particulier, on a:

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, F(\eta) = \hat{\varphi}(\eta) = 0$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse, il vient $\varphi = 0$, soit $f = 0$ puisque $\rho > 0$ sur I, ce qui montre le résultat.

■