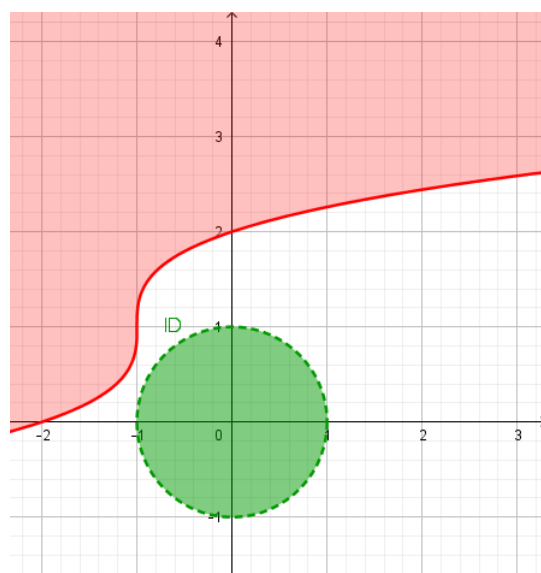


Gaëlle RICHET  
Maxime BOUCHEREAU  
M1 Maths Fondamentales

Merci à notre tuteur : Goulwen Fichou

Basé sur le livre *An Introduction to Semialgebraic Geometry* de Michel Coste.

# TER-Rapport Géométrie semi-algébrique





# Partie 1: Ensembles semi-algébriques

## 1 - Définitions et exemples

**Définition.** *Un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  satisfaisant une combinaison booléenne d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients réels.*

*En d'autres termes, les sous-ensembles semi-algébriques de  $\mathbb{R}^n$  forment la plus petite classe  $\mathcal{SA}_n$  de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  telle que :*

1. *Si  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $\{x \in \mathbb{R}^n / P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n / P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n$ .*
2. *Si  $A \in \mathcal{SA}_n$  et  $B \in \mathcal{SA}_n$ , alors  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  et  $\mathbb{R}^n \setminus A$  sont dans  $\mathcal{SA}_n$ .*

**Remarque.** *Le fait qu'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  soit semi-algébrique ne dépend pas du choix des coordonnées affines.*

On peut caractériser les sous-ensembles semi-algébriques de  $\mathbb{R}^n$  de manière plus précise:

**Proposition.** *Tout sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$  est une union finie de sous-ensembles algébriques de la forme  $\{x \in \mathbb{R}^n / P(x) = 0 \text{ et } Q_1(x) > 0 \text{ et } \dots \text{ et } Q_l(x) > 0\}$ , où  $l \in \mathbb{N}$  et  $P, Q_1, \dots, Q_l \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ .*

Voyons maintenant quelques exemples fondamentaux d'ensembles semi-algébriques :

**Exemples.** - *Un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{R}^n$  est en particulier un sous-ensemble semi-algébrique.*

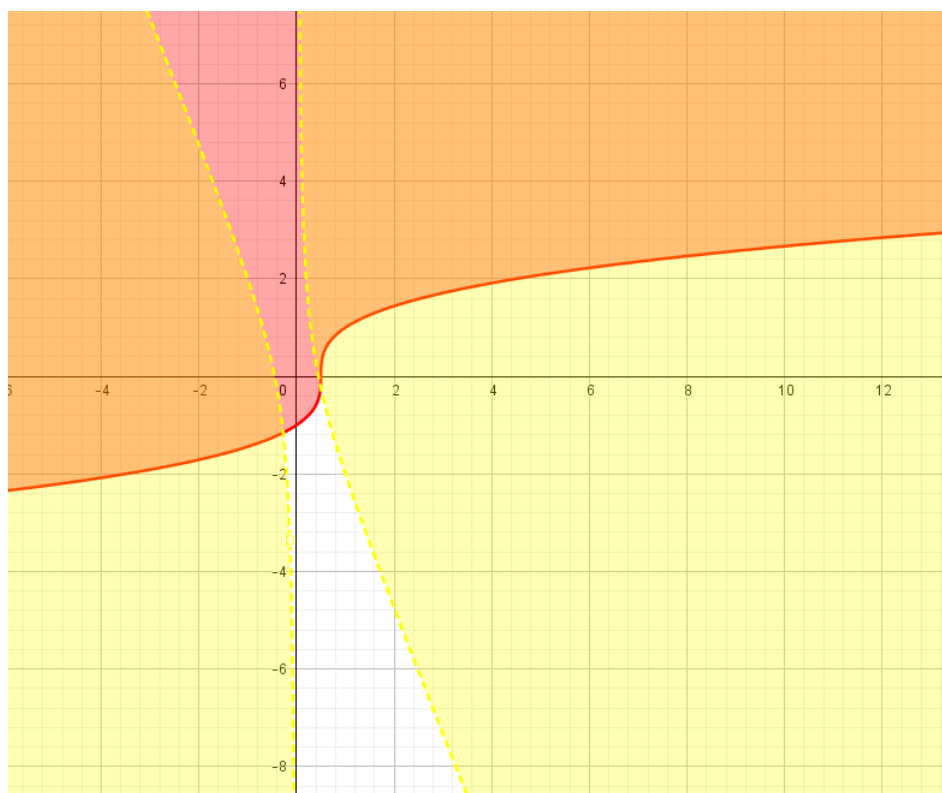
- *Les sous-ensembles semi-algébriques de  $\mathbb{R}$  sont des unions finies de points et d'intervalles ouverts.*

- Si  $A \subset \mathbb{R}^m$  et  $B \subset \mathbb{R}^n$  sont semi-algébriques, alors  $A \times B$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ .
- Si  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application polynomiale (c'est-à-dire que  $F = (F_1, \dots, F_n)$  avec  $F_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ ) et si  $A$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $F^{-1}(A)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m$ .
- L'ensemble

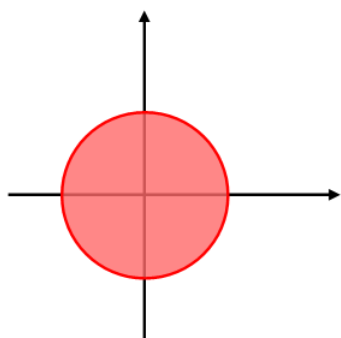
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y^3 + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 2xy - 1 > 0\}$$

est semi-algébrique.

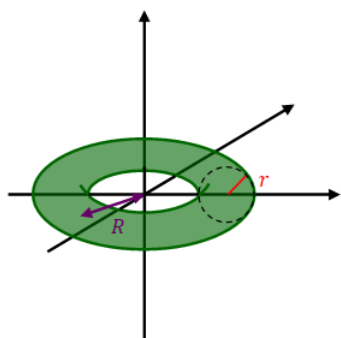
Sur cette illustration, l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y^3 + 1\}$  apparaît en rouge, et l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 2xy - 1 > 0\}$  en jaune (l'intersection des deux apparaît en orange):



- D'autres ensembles plus "classiques" comme le disque ou le tore sont des ensembles semi-algébriques (le tore est même algébrique);



$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{D}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \{X^2 + Y^2 - 1 < 0\} \cup \{X^2 + Y^2 - 1 = 0\} \\ \bar{\mathbb{D}} &\in \mathcal{SA}_2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \{(X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(X^2 + Y^2) = 0\} \\ \mathbb{T} &\in \mathcal{SA}_3 \text{ (est également algébrique)}\end{aligned}$$

**Définition.** Soient  $A \in \mathbb{R}^m$  et  $B \in \mathbb{R}^n$  des ensembles semi-algébriques. Une **application semi-algébrique** de  $A$  vers  $B$  est une application  $f : A \rightarrow B$  telle que son graphe

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

**Exemples.** On peut vérifier directement que les applications suivantes sont bien semi-algébriques:

- Une application polynomiale est semi-algébrique.
- Les applications rationnelles régulières (fractions de polynômes dont les dénominateurs ne s'annulent pas) sont semi-algébriques.
- Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi-algébrique positive, alors  $\sqrt{f}$  est semi-algébrique. De même, pour toute fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  semi-algébrique,  $|f|$  est aussi semi-algébrique.

**Proposition.** On a les propriétés suivantes:

- L'image directe et l'image réciproque d'ensembles semi-algébriques par une application semi-algébrique sont semi-algébriques.
- La composition de deux applications semi-algébriques est semi-algébrique.
- Soit  $A \in \mathbb{R}^n$  un ensemble semi-algébrique. L'ensemble des fonctions semi-algébriques de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  a une structure d'anneau.

Ces propriétés découlent du théorème de Tarski-Seidenberg, dont nous allons voir maintenant la seconde et la troisième version.

## 2 - Théorème de Tarski-Seidenberg

**Théorème. Tarski-Seidenberg - première version** Soient  $A$  un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection sur les  $n$  premières coordonnées. Alors  $\pi(A)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ .

On a les corollaires suivants :

**Corollaire.** - Si  $A$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{n+k}$ , son image par la projection sur les  $n$  premières coordonnées est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ .

- Si  $A$  est un sous ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m$  et  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application polynomiale, alors l'image directe  $F(A)$  de  $A$  par  $F$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Preuve.** 1. est facilement obtenu par récurrence sur  $k$ .

Pour 2. on remarque que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n / x \in A \text{ et } y = F(x)\}$$

est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  dont la projection sur  $\mathbb{R}^n$  est  $F(A)$ .

□

**Corollaire.** Si  $A$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ , son adhérence  $\overline{A}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est aussi semi-algébrique.

**Preuve.** L'adhérence de  $A$  est :

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n, y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2\}$$

et on peut l'écrire de la manière suivante :

$$\bar{A} = \mathbb{R}^n \setminus (\pi_1(\{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \varepsilon > 0\} \setminus \pi_2(B)))$$

où

$$B = \left\{ (x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / y \in A \text{ et } \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\},$$

$\pi_1(x, \varepsilon) = x$  et  $\pi_2(x, \varepsilon, y) = (x, \varepsilon)$ . Comme  $B$  est semi-algébrique, alors  $\bar{A}$  l'est aussi.

□

L'exemple précédent montre qu'il n'est pas toujours simple d'utiliser les projections pour montrer qu'un ensemble est semi-algébrique. On a plus l'habitude de manipuler des formules, ce que nous permet la troisième version du théorème de Tarski-Seidenberg.

Pour introduire ce théorème, on doit d'abord définir la notion de formule du premier ordre :

**Définition.** Une **formule du premier ordre** (du langage des corps ordonnés à paramètres dans  $\mathbb{R}$ ) est une formule obéissant aux règles suivantes:

- 1. Si  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $P = 0$  et  $P > 0$  sont des formules du premier ordre.
- 2. Si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules du premier ordre, alors " $\Phi$  et  $\Psi$ ", " $\Phi$  ou  $\Psi$ " et " $\text{non } \Phi$ " (souvent notées " $\Phi \wedge \Psi$ ", " $\Phi \vee \Psi$ " et " $\neg \Phi$ " respectivement) sont des formules du premier ordre.
- 3. Si  $\Phi$  est une formule et  $X$  une variable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\exists X \Phi$  et  $\forall X \Phi$  sont des formules du premier ordre.

Les formules obtenues en n'utilisant que les règles 1 et 2 sont appelées **formules sans quantificateurs**.

**Exemple.** *Considérons un polynôme du second degré  $P = AX^2 + BX + C$ . Alors la formule du premier ordre  $\exists X : P(X) = 0$  est équivalente à une formule sans quantificateur:*

*En effet, il suffit d'observer que:*

$$\exists X : P(X) = 0 \Leftrightarrow \exists X : AX^2 + BX + C = 0 \Leftrightarrow B^2 - 4AC \geq 0$$

**Remarque.** *Dans les formules du premier ordre avec quantificateurs, les variables **doivent parcourir**  $\mathbb{R}$ . On peut également montrer que cela fonctionne toujours avec des variables parcourant  $\mathbb{R}^n$ , ou un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ . En revanche,*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \exists n \in \mathbb{N} : y = nx\}$$

*n'est pas semi-algébrique. Nous montrerons plus tard pourquoi.*

Par définition, un sous ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est semi-algébrique si et seulement si il existe une formule sans quantificateur  $\Phi(X_1, \dots, X_n)$  telle que :  $(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow \Phi(x_1, \dots, x_n)$ .

On a donc le théorème suivant:

**Théorème. Tarski-Seidenberg - deuxième version**

*Si  $\Phi(X_1, \dots, X_n)$  est une formule du premier ordre, l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_n)$  qui satisfont  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  est semi-algébrique.*

**Preuve.** *On prouve ce théorème par récurrence sur la construction des formules :*

*La première règle donne des ensembles semi-algébriques.*

*La deuxième règle donne des ensembles semi-algébriques à partir d'ensembles semi-algébriques.*

*Pour la troisième règle, si  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \Phi(x_1, \dots, x_{n+1})\}$  est semi-algébrique, alors sa projection sur les  $n$  premières coordonnées, c'est-à-dire  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \exists x_{n+1} \text{ tq } \Phi(x_1, \dots, x_{n+1})\}$ , est aussi semi-algébrique d'après la première version du théorème de Tarski-Seidenberg.*

*Pour le cas de " $\forall X \Phi$ ", il suffit d'observer que cette formule est équivalente à " $\neg \exists X \neg \Phi$ ".*

□

Montrons de nouveau le corollaire portant sur l'adhérence d'un ensemble semi-algébrique, cette fois-ci en utilisant la deuxième version du théorème de Tarski-Seidenberg:



**Preuve.** Il suffit de montrer que les points de  $\bar{A}$  réalisent une formule du premier ordre, ce qui est quasiment direct. Le plus long est de l'écrire :

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \text{ et } \exists y \in \mathbb{R}^n, y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2\}$$

On a,

$$\|x - y\|^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - \|x - y\|^2 > 0 \Leftrightarrow P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \varepsilon) > 0$$

avec

$$P(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z) = Z^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2$$

un polynôme et  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ . Donc d'après la règle numéro 1, c'est bien une formule du premier ordre.

Comme  $A$  est semi-algébrique,  $y \in A$  peut se réécrire sous la forme  $y\Phi$  où  $\Phi$  est une formule du premier ordre. Donc

$$y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow y\Phi \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2$$

est une formule du premier ordre d'après la règle numéro 2.

Donc d'après la règle numéro 3,

$$\exists y \in \mathbb{R}^n, y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2$$

est aussi une formule du premier ordre. Enfin,  $\varepsilon > 0$  est clairement une formule du premier ordre, donc

$$\varepsilon > 0 \text{ et } \exists y \in \mathbb{R}^n, y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2$$

est aussi du premier ordre d'après la règle 2, et donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0 \text{ et } \exists y \in \mathbb{R}^n, y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2$$

est finalement bien une formule du premier ordre.

Donc d'après le théorème de Tarski-Seidenberg,  $\bar{A}$  est bien semi-algébrique.

□

Au final, cette version de la preuve est plus longue à écrire que la précédente mais est plus simple à visualiser et à comprendre.



# Partie 2: Décomposition d'un ensemble semi-algébrique

## 1 - Décomposition algébrique cylindrique

**Définition.** Une *décomposition algébrique cylindrique*, notée CAD (de l'anglais *Cylindrical Algebraic Decomposition*) de  $\mathbb{R}^n$  est une suite  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$  où  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $\mathcal{C}_k$  est une partition finie de  $\mathbb{R}^k$  en ensembles semi-algébriques (appelés cellules), satisfaisant ces propriétés:

- Chaque cellule  $C \in \mathcal{C}_1$  est soit un point, soit un intervalle ouvert.
- $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \forall C \in \mathcal{C}_k$ , il existe un nombre fini de fonctions continues semi-algébriques  $\xi_{C,1}, \dots, \xi_{C,l_C} : C \rightarrow \mathbb{R}$  et le cylindre  $C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{k+1}$  est l'union disjointe de cellules de  $\mathcal{C}_{k+1}$  qui sont:
  - Soit le graphe de l'une des fonctions  $\xi_{C,j}$  (pour  $j \in \llbracket 1; l_C \rrbracket$ ):

$$A_{C,j} = \{(x', x_{k+1}) \in C \times \mathbb{R} : x_{k+1} = \xi_{C,j}(x')\}$$

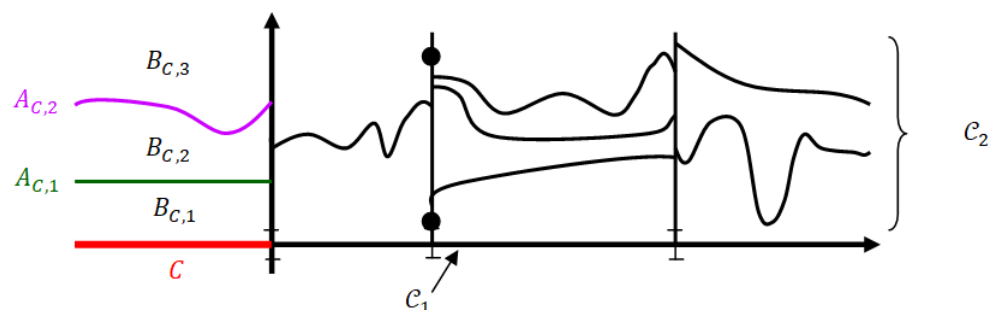
- Soit une bande du cylindre minorée et majorée respectivement par le graphe de  $\xi_{C,j}$  et  $\xi_{C,j+1}$ , pour  $j \in \llbracket 1; l_C \rrbracket$ , avec les conventions  $\xi_{C,0} = -\infty$  et  $\xi_{C,l_C+1} = +\infty$ :

$$B_{C,j} = \{(x', x_{k+1}) \in C \times \mathbb{R} : \xi_{C,j}(x') < x_{k+1} < \xi_{C,j+1}(x')\}$$

**Proposition.** Chaque cellule d'une CAD est semi-algébriquement homéomorphe à un hypercube ouvert  $]0, 1[^d$ , avec, par convention,  $]0, 1[^0$  réduit à un point.

**Exemple.** Voici un exemple de CAD dans  $\mathbb{R}^2$ . Un exemple de cellule est donné (en rouge sur le dessin). On voit bien les cellules homéomorphes à

$]0, 1[^0, ]0, 1[$  ou  $]0, 1[2$ :



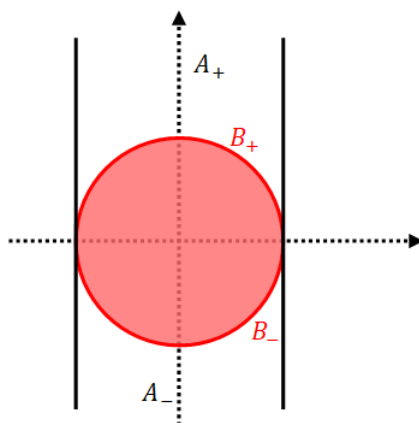
Le principe reste identique en dimension supérieure.

**Définition.** Une *Décomposition Algébrique Cylindrique adaptée à une famille finie de polynômes*  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  (avec  $r \in \mathbb{N}^*$ ) est une CAD telle que pour chaque cellule  $C \in \mathcal{C}_n$ , chaque polynôme  $P_i$  a un signe constant ( $> 0, < 0$  ou  $= 0$ ) sur  $C$ .

On admettra le théorème suivant:

**Théorème.** Pour toute famille  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , il existe une CAD adaptée de  $\mathbb{R}^n$

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons cette CAD (on rappelle ici que  $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ ) (c'est le disque unité ouvert):



$$\mathcal{C}_1 = \{ ]-\infty; -1[; \{-1\}; \{1\}; ]1; +\infty[ \} \cup ]-1; 1[$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{X < -1\}; \{X = -1\}; \{X = 1\}; \{X > 1\}\} \cup A_+ \cup A_- \cup B_+ \cup B_- \cup \mathbb{D}$$

avec:

$$A_+ = (\{Y > 0\} \cap \{|X| < 1\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

$$A_- = (\{Y < 0\} \cap \{|X| < 1\}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

$$B_+ = \partial\mathbb{D} \cap \{Y > 0\}$$

$$B_- = \partial\mathbb{D} \cap \{Y < 0\}$$

$B_{\pm}$  est le graphe de la fonction  $X \mapsto \pm\sqrt{1-X^2}$ , ces deux fonction étant semi-algébriques, comme racine de la fonction polynomiale  $X \mapsto 1-X^2$

Alors, cette CAD de  $\mathbb{R}^2$  est adaptée à la famille de polynômes  $\{X^2-1, X^2+Y^2-1\}$ . En effet, le polynôme  $X^2-1$  est strictement positif sur  $\{X < -1\}, \{X > 1\}$  et nul sur  $\{X = -1\}, \{X = 1\}$ . De plus, le polynôme  $X^2+Y^2-1$  est strictement négatif sur  $\mathbb{D}$ , strictement positif sur  $A_+, A_-$  et nul sur  $B_-, B_+$ .

## 2 - Décomposition en hypercubes ouverts par homéomorphisme

**Proposition.** Soit  $S \in \mathcal{SA}_n$ . Alors il est possible de décomposer  $S$  de cette manière:

$$S = \bigsqcup_{i=1}^p C_i$$

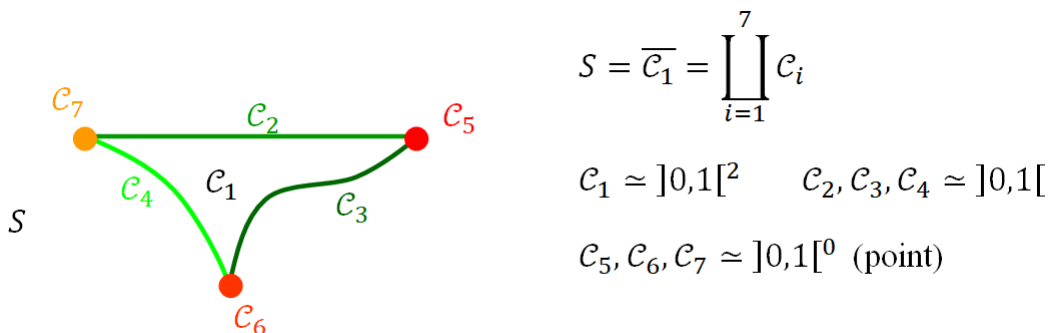
avec:

- Chaque  $C_i$  est semi-algébriquement homéomorphe à un hypercube ouvert  $]0, 1[^{d_i}$  avec  $d_i \in \mathbb{N}$
- $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ;

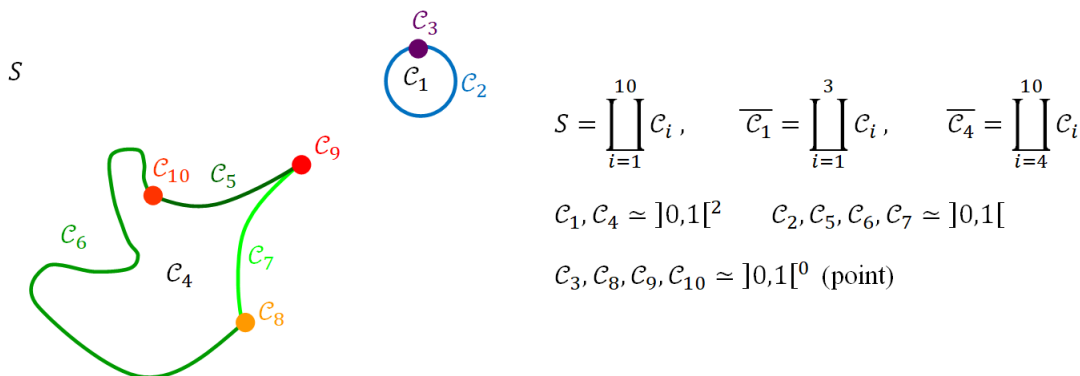
$$\overline{C_i}^S = C_i \sqcup \bigsqcup_{j \in E} C_j$$

où la réunion de  $C_i$  avec les  $C_j$  est disjointe, et avec  $E \subset \llbracket 1; p \rrbracket$  voire  $E = \emptyset$  et pour tout  $j \in E$ ;  $C_j$  est semi-algébriquement homéomorphe à un hypercube ouvert  $]0, 1[^{d_j}$  avec  $d_j < d_i$

**Exemples.** Voici deux exemples de décomposition d'ensembles semi-algébriques en hypercubes ouverts (par homéomorphisme):



Ce second exemple est un cas d'ensemble non connexe:



### 3 - Composantes connexes d'un ensemble semi-algébrique

La CAD montre que tout ensemble semi-algébrique  $S \subset \mathbb{R}^n$  est l'union disjointe de sous-ensembles semi-algébriques  $C_1, \dots, C_p$  tels que chaque cellule  $C_i$  est semi-algébriquement homéomorphe à un hypercube ouvert  $]0,1[{}^{d_i}$  (et on rappelle que  $]0,1[{}^0$  est un point).

Chaque cellule  $C_i$  est évidemment connexe.

On a donc le théorème suivant:

**Théorème.** *Tout ensemble semi-algébrique est localement connexe et a un nombre fini de composantes connexes semi-algébriques.*

**Preuve.** *On utilise la notation introduite ci-dessus, et on définit la relation suivante : deux cellules  $C_i$  et  $C_j$  sont dites adjacentes si  $C_i \cap \overline{C_j} \neq \emptyset$ .*

On considère maintenant la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par la relation "être adjacentes" :  $C_i \sim C_j$  s'il existe une suite  $C_i = C_{i_0}, C_{i_1}, \dots, C_{i_q} = C_j$  telle que chaque  $C_{i_j}$  est adjacente à  $C_{i_{j+1}}$  ou  $C_{i_{j+1}}$  est adjacente à  $C_{i_j}$ . On obtient ainsi une partition de  $S$  en un nombre fini de sous-ensembles semi-algébriques  $S_1, \dots, S_r$ , où chaque  $S_i$  est une classe d'équivalence des cellules  $C_j$  pour la relation  $\sim$ .

On remarque que si  $C_i \cap \overline{S_j} \neq \emptyset$ , alors  $C_i$  est adjacente à une cellule  $C_k \subset S_j$ , et donc  $C_i \subset S_j$ . Donc chaque  $S_i$  est fermé dans  $S$ . Et de plus chaque  $S_i$  est aussi ouvert dans  $S$ .

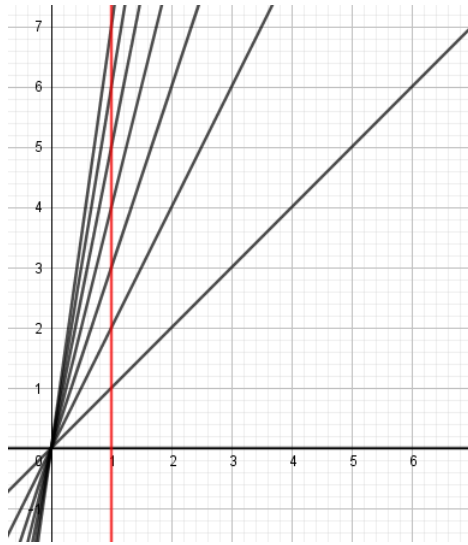
Montrons maintenant que les  $S_i$  sont connexes : si  $S_i = F_1 \sqcup F_2$ , où  $F_1$  et  $F_2$  sont des sous-ensembles fermés de  $S_i$ , on a :

- chaque  $C_j \subset S_i$  est inclus soit dans  $F_1$ , soit dans  $F_2$  (car  $C_j$  est connexe).
- si  $C_j$  et  $C_k$  sont inclus dans  $S_i$  et  $C_j$  est adjacent à  $C_k$ , alors  $C_j$  et  $C_k$  sont tous les deux inclus soit dans  $F_1$ , soit dans  $F_2$ .

On déduit donc de la définition de  $S_i$  que  $S_i = F_1$  ou  $S_i = F_2$ . La deuxième partie du théorème est donc démontrée.

Montrons la première partie. L'ensemble semi-algébrique  $S \subset \mathbb{R}^n$  est localement connexe si toute boule ouverte  $B$  centrée en  $x$  contient un voisinage connexe de  $x$  inclus dans  $S$ . Puisque l'ensemble  $B \cap S$  est semi-algébrique, il a un nombre fini de composantes connexes. La composante connexe de  $B \cap S$  contenant  $x$  est donc un voisinage connexe de  $x$  dans  $S$ .

**Remarque.** Revenons sur l'exemple de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists n \in \mathbb{N} : y = nx\}$ . On suppose cet ensemble semi-algébrique. Alors, son intersection avec la droite d'équation  $x = 1$  (qui est semi-algébrique) est un ensemble semi-algébrique.



Or on constate que cette intersection a un nombre *infini* de composantes connexes, donc  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists n \in \mathbb{N} : y = nx\}$  ne peut pas être semi-algébrique.



# Partie 3: Triangulation

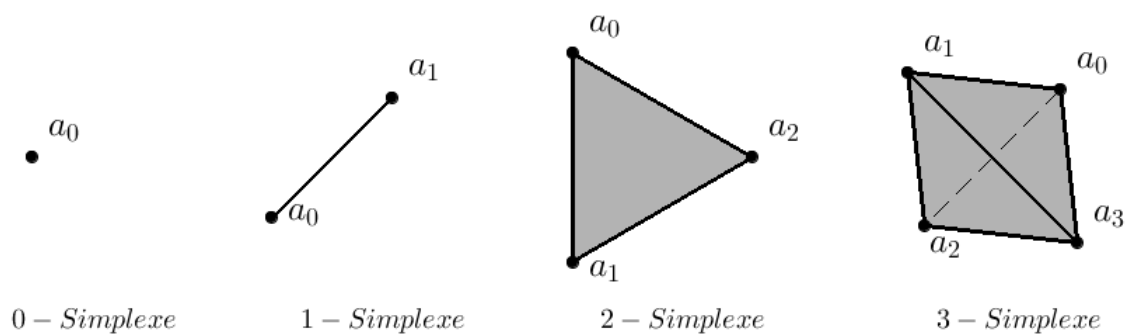
## 1 - Simplexes: Définitions et complexes simpliciaux

**Définition.** Soient  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$   $d + 1$  points indépendants de manière affine. Le  **$d$ -simplexe** de sommets  $a_0, \dots, a_d$  est l'ensemble:

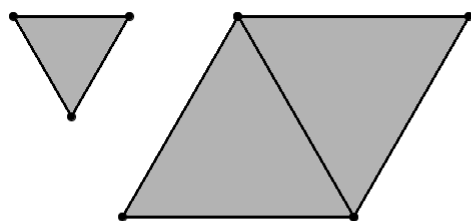
$$\sigma = [a_0, \dots, a_d] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in [0, 1] : \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i \right\}$$

Le **simplexe ouvert** correspondant est:

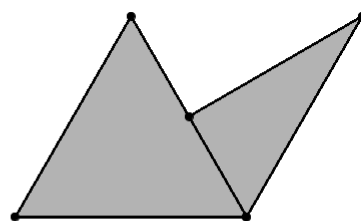
$$\overset{\circ}{\sigma} = (a_0, \dots, a_d) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in ]0, 1[ : \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i \right\}$$



**Définition.** Un **complexe simplicial fini** de  $\mathbb{R}^n$  est une collection  $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$  de simplexes  $\sigma_j \subset \mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $\sigma_i, \sigma_j \in K$  tel que  $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$ ,  $\sigma_i \cap \sigma_j$  est une face commune de  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$ .



*Un complexe simplicial*



*Pas un complexe simplicial*

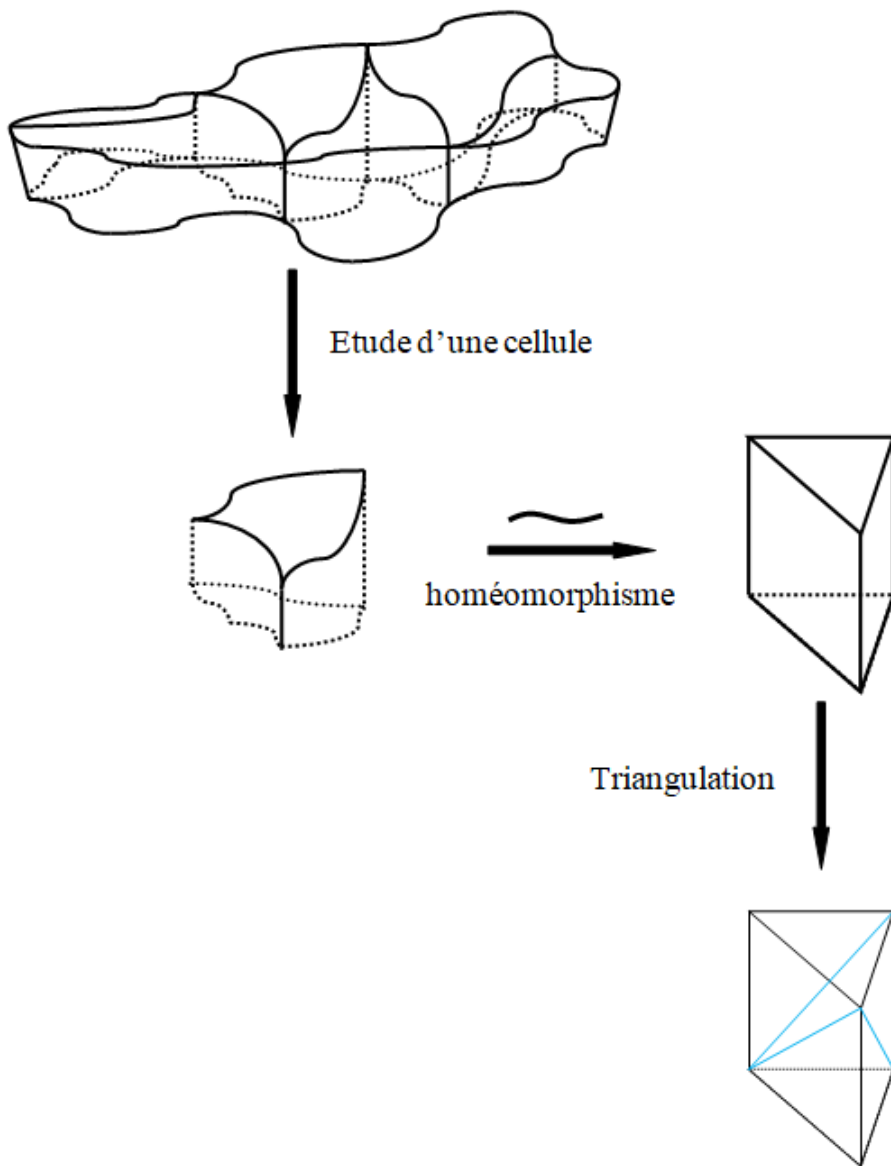
**Proposition.** *Propriétés des complexes simpliciaux*

- Un complexe simplicial est un ensemble semi-algébrique.
- Tout complexe simplicial peut être écrit comme un complexe simplicial de simplexes ouverts (autrement dit, en une union disjointe de simplexes ouverts), avec la convention qu'un point est un simplexe ouvert de dimension 0.

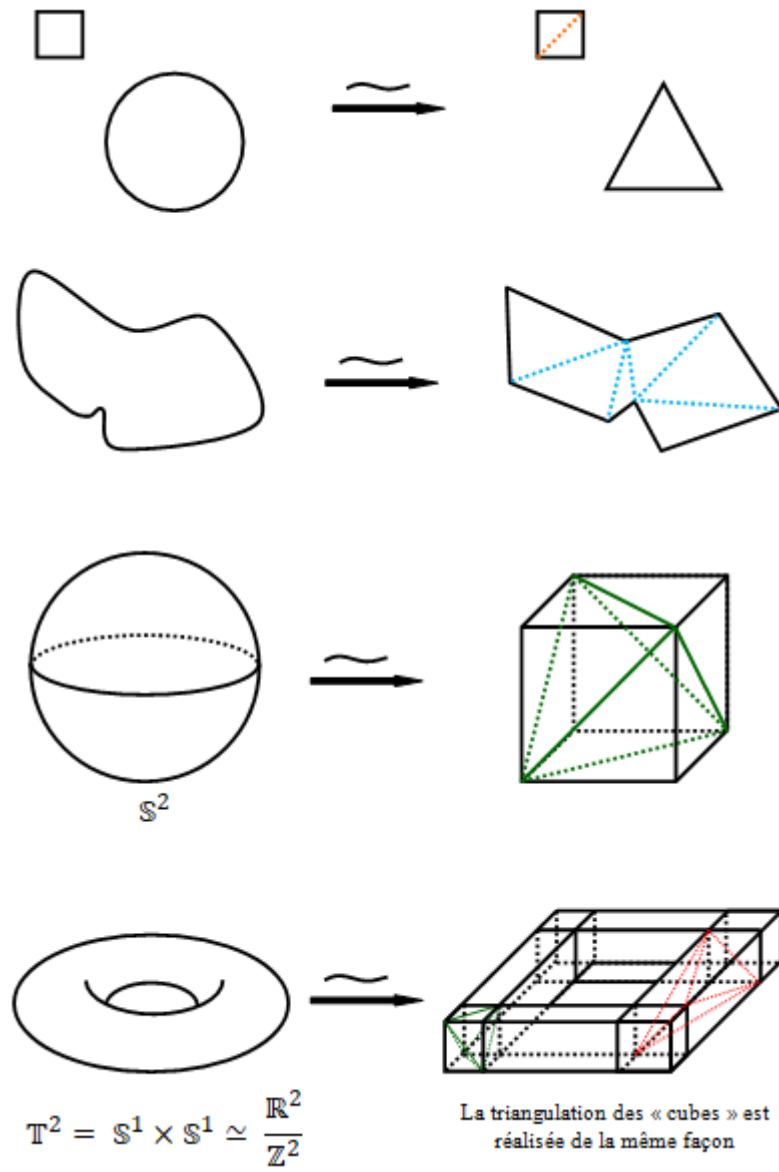
## 2 - Triangulation d'ensembles semi-algébriques compacts

**Théorème (Triangulation d'ensembles semi-algébriques compacts).** Soit  $S \in \mathcal{SA}_n$  un ensemble semi-algébrique compact. Il existe un complexe simplicial  $K$  et un homéomorphisme semi-algébrique  $h : |K| \rightarrow S$ , où  $|K|$  est la réalisation topologique de  $K$ .

Ce schéma donne une idée du principe de la triangulation :



## Exemples.



### 3 - Le lemme de sélection des courbes

**Théorème (Lemme de sélection des courbes).** Soient  $S \in \mathcal{SA}_n$  et  $x \in \overline{S} \setminus S$ . Il existe une application continue semi-algébrique  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma ]0, 1[ \subset S$ .

**Preuve.** Nous allons donner une idée de la preuve.

Quitte à considérer  $S \cap \mathbb{B}(x, 1)$ , on peut supposer  $S$  borné et  $\overline{S}$  est un ensemble semi-algébrique compact. On peut utiliser le théorème de triangulation des ensembles semi-algébriques compacts.

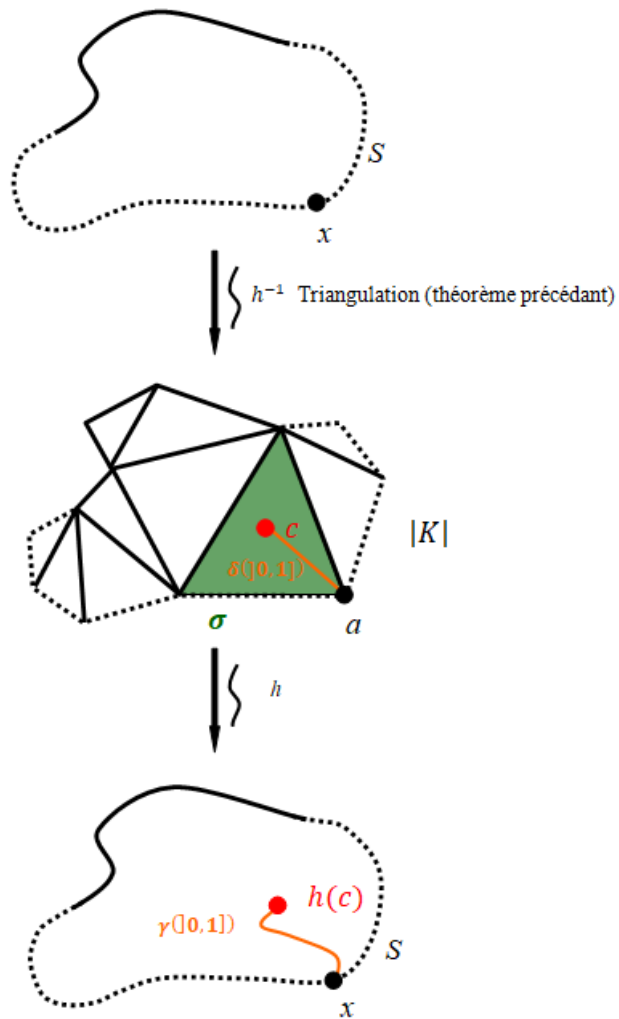
$S$  est homéomorphe à un complexe simplicial (ou plutôt à sa réalisation topologique, i.e. la réunion des simplexes du complexe). On note  $h : |K| \rightarrow \overline{S}$  l'homéomorphisme semi-algébrique correspondant. On peut donc trouver un simplexe  $\sigma$  de  $K$  dont  $a$  est un sommet et tel que  $x = h(a)$  (car  $x \in \overline{S} \setminus S$ ), avec  $h(\overset{\circ}{\sigma}) \subset S$ .

On considère maintenant l'application:

$$\begin{array}{ccc} \delta : [0, 1] & \longrightarrow & \sigma \\ t & \longmapsto & tc + (1-t)a \end{array}$$

où  $c$  est le barycentre du simplexe  $\sigma$ . On a donc  $\delta ]0, 1[ \subset \overset{\circ}{\sigma}$ . Ainsi, l'application  $\gamma = h \circ \delta$  vérifie les propriétés du théorème.

Cette figure dans le cas  $n = 2$  illustre la stratégie expliquée dans la preuve:



□