Oral blanc Modélisation 1
-
Rapport

Option B - Calcul Scientifique

Introduction

Ce document à pour objectifs de faire un compte-rendu des questions posées durant l'entretien ainsi que des remarques et commentaires généraux du jury au sujet de la prestation.

Tout d'abord, cet oral blanc s'est déroulé dans des conditions particulières. En effet, il n'a pas eu lieu à l'ENS Rennes, mais s'est tenu par visioconférence en raison de la pandémie de Covid-19 (durant le confinement). Ainsi, cinq heures de préparation ont été laissées au lieu de quatre habituellement afin de nous laisser le temps de préparer un fichier à montrer au jury.

J'ai personnellement consacré quatre heures à la modélisation à proprement parler (programmation, maths...), puis la dernière heure à réaliser le fichier. Ce fichier est constitué de notes manuscrites présentées sous forme de plan, auxquelles viennent s'ajouter des images des différentes simulations numériques, assemblées sous forme d'un fichier PDF. J'écrivais donc mes notes au fur et à mesure que j'avançais, puis ai photographié le tout, du vrai bricolage !

Le texte proposait l'étude d'une population d'un lieu donné, d'abord de façon générale, faisant intervenir des équations différentielles, puis en tenant compte de l'espace, donnant des EDP.

1 - Questions posées lors de l'entretien

Les questions que je vais détailler ne sont probablement pas données dans l'ordre telles qu'elles ont été posées lors de l'entretien, je me suis contenté de les regrouper par thème même si le jury semble avoir suivi un certain ordre.

a - Equation aux dérivées partielles (théorique et numérique)

Question: Lors de la démonstration de la consistance du schéma numérique pour l'EDP, on évoque ensuite la stabilité de ce même schéma, vous avez parlé du principe de Lax, peut-on réellement l'appliquer ?

Réponse: En réalité, non, il ne s'applique que pour les schémas numériques concernant les EDP d'évolution linéaires, comme par exemple l'équation de la chaleur sans terme de source comme ici.

Question: Concernant la stabilité du schéma numérique, pourquoi choisir un schéma implicite ? Avez-vous une idée de la manière dont on montre la stabilité d'un schéma numérique, même simplifié comme l'équation de la chaleur ?

Réponse: Un schéma explicite donnerait une stabilité conditionnelle (condition CFL: une inégalité sur la constante h^2/τ à vérifier). Le schéma implicite évite ce problème, même si encore une fois, rien n'est évident puisque l'EDP n'est pas linéaire, bien que les simulations ne posent pas de problème visible de stabilité.

Pour vérifier la stabilité d'un schéma numérique pour une EDP linéaire à coefficients constants, on utilise la méthode de Fourier-Von Neuman, qui passe par les séries de Fourier. On étend notre vecteur U^n en un vecteur de $l^2(\mathbb{Z})$ (et ce sera notre norme de stabilité, en espace) en l'écrivant sous forme d'une série de Fourier:

$$\underline{u}^n(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n e^{ijx}$$

en attribuant la valeur 0 aux composantes de U non présentes initialement, i.e. hors de $j \in \{1, ..., J\}$. A partir du schéma numérique, on met en évidence une relation entre $\underline{u}^{n+1}$ et $\underline{u}^n$ (en notant que la translation à droite sur U^n correspond à multiplier $\underline{u}^n$ par e^{ix}), puis le but est de trouver une bonne condition telle que $\left|\underline{u}^{n+1}\right| \leq |\underline{u}^n|$. A partir du théorème de Parseval, on aura cette même inégalité sur les normes l^2 des vecteurs U^n, donc la stabilité du schéma.

Question: Concernant l'EDP linéarisée, vous donnez l'existence d'une unique solution dans la classe de Schwartz en espace pour tout temps, avec en plus des conditions d'intégrabilité sur u et des dérivées, pourquoi ?

Réponse: Ces conditions assurent que l'on peut appliquer la transformée de Fourier en espace sur l'EDP, mais il s'agit là d'un excès de prudence, l'appartenance à la classe de Schwartz impliquant l'intégrabilité d'une fonction et de toutes ses dérivées.

Question: A propos de la simulation numérique sur les EDP, vous avez parlé de l'équation de la chaleur "à l'envers", pouvez-vous préciser ?

Réponse: La encore, il s'agit d'une erreur, puisque l'on a bien une diffusion (comme avec l'équation de la chaleur sans terme de source), mais ici la source va faire que l'on obtient un front au niveau de la solution. Ce n'est pas un processus inverse à celui qui se passe pour l'équation de la chaleur.

Question: Avez-vous une idée de la manière dont on montre que la solution est comprise entre 0 et 1 , c'est-à-dire comme la condition initiale (au niveau numérique) ?

Réponse: On peut passer par les matrices monotones (une petite erreur en rappelant la définition de matrice monotone...). En réalité, on peut utiliser un principe du maximum.

b - Equations différentielles

Question: Concernant les équations différentielles, vous avez proposé une solution explicite à l'EDO $\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{\kappa}\right)$, donnant la positivité et le fait qu'elle soit définie pout tout temps. Peut-on faire autrement ? Sait-on que c'est bien la solution locale donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Réponse: On put s'assurer que la solution n'explose pas en temps fini et est positive pour tout temps à l'aide du portrait de phase. Par ailleurs, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne une unique solution locale, que l'on a, et que l'on prolonge.

Question: Comment montrer que la solution de l'EDO $\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{\kappa}\right)$ va converger vers un des deux points d'équilibre (avec la donnée initiale entre ces deux points d'équilibre)?

Réponse: Avec le portrait de phase, on peut voir que la solution va bien converger vers les deux points d'équilibre. Mathématiquement, si la solution converge vers une autre solution, cela signifie que la dérivée tend vers 0, ce qui est absurde pour une valeur différente des points d'équilibre (on peut le voir avec le portrait de phase). Plus précisément, si on atteint une valeur limite hors des deux points d'équilibre, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que si on part de cette valeur, on y restera, alors qu'on doit se déplacer (dérivée non-nulle), ce qui est absurde (ce résultat est plus évident à comprendre avec le portrait de phase).

c - Modélisation

Question: Pouvez-vous préciser la modélisation de l'EDP ?

Réponse: Le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ représente la variation temporelle de population, le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ représente les migrations, et le terme $g(u)$ représente la variation de population (naissances et décès). En réalité, le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ représente une diffusion de population (comme des particules), c'est-à-dire que les personnes vont avoir tendance à aller d'un endroit à un autre de façon aléatoire.

Question (suite): Si on avait réellement une migration, quelle serait la forme de l'EDP ?

Réponse: On aurait un terme $\frac{\partial u}{\partial x}$ à la place de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, comme une équation de transport.

Question: Pouvez-vous expliquer la différence entre les équations différentielles $\frac{du}{dt} = \alpha u$ et $\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{\kappa}\right)$?

Réponse: La première équation considère que personne ne meurt, alors que la seconde tient compte de la mortalité. Il s'agit la d'une erreur, en réalité, la première EDO (modèle de Malthus) signifie que, selon le signe de α (accroissement naturel, différence entre naissances et décès), la population va croître au décroître, alors que la seconde EDO (modèle de Verhulst) tient compte du fait que les grandes populations ne vont plus croître beaucoup par rapport aux petites, ce qui est plus représentatif de la réalité.

d - Simuations numériques (cadre pratique)

Question: Qu'avez-vous utilisé pour résoudre les EDO ?

Réponse: La fonction **ode** de Scilab a été utilisée.

Question (suite): Savez-vous quel est l'algorithme qui se cache derrière ?

Réponse: Pas réellement, mais on peut supposer que le logiciel va "optimiser" les méthodes employées. On peut penser à des méthodes performantes comme celles de Runge-Kutta.

Question: Pour inverser une matrice, vous avez utilisé la fonction M/U, savez-vous ce qu'il peut se cacher derrière ?

Réponse: Là encore, je ne sais pas réellement, mais on peut envisager des méthodes optimisées, ici, la matrice à inverser est tridiagonale, et des algorithmes existent pour inverser une matrice tridiagonale.

Question (suite): Connaissez-vous des méthodes de résolution de systèmes linéaires que l'on peut envisager ?

Réponse: Oui, par exemple des méthode itératives (Gauss-Seidel, Jacobi), ou encore des méthodes de gradient (vu que la matrice est symétrique). Un autre option reste le pivot de Gauss.

Question: Concernant le schéma numérique de résolution d'EDP, peut-on faire le lien avec l'intégration numérique, est-t-il possible de l'améliorer afin d'avoir une meilleure précision ?

Réponse: Le schéma est une méthode d'Euler implicite en le terme de diffusion, on peut le relier à une méthode des rectanges à droite (la méthode des rectanges à gauche correspond à une méthode d'Euler explicite). Mais on peut "croiser" ces deux méthodes (un facteur $\frac{1}{2}$ devant chaque terme) afin d'obtenir un schéma de type Crank-Nicolson, lié à la méthode des trapèzes, d'ordre 2. On aurait ainsi un schéma d'ordre de consistance 2 en temps, ce qui est plus précis que ce que l'on a (1 en espace).

2 - Bilan de l'oral

a - Commentaires

Là encore, les commentaires ne sont pas écrits dans le même ordre tels que donnés par le jury.

- Le théorème portant sur l'EDP linéarisée doit être bien maîtrisé, attention à ne pas tenter de choses "dangereuses".

- Attention au principe de Lax, bien noter qu'il intervient dans des problèmes linéaires. Toutefois on peut dire que l'on ne fait pas d'étude de stabilité, mais dire que dans l'équation de la chaleur, on peut l'appliquer pour avoir la convergence (s'il y a consistance).

- C'est bien de connaître le principe du maximum, attention à l'erreur de définition sur les matrices monotones.

- La consistance du schéma est bien traitée, l'erreur de consistance est correctement définie, et c'est bien d'avoir mentionné que le schéma était en partie explicite et d'avoir souligné le fait que le "point central" est (x_j, t_{n+1}) et non pas (x_j, t_n) comme d'habitude. C'est bien d'avoir parlé de développements limités afin d'estimer l'erreur de consistance.

- Attention à la modélisation, pas mal de confusions et d'erreurs d'interprétation, en particulier sur l'équation de Malthus alors que cela paraît évident.

- La partie sur les équations différentielles est bien traitée, et très précise (application des théorèmes, explications...). On notera que pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est bien de réécrire

$$f: \begin{array}{ccc} I \times U & \longrightarrow & U \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

- Les portraits de phase sont très bien expliqués et illustrent bien les propriétés de EDO (points d'équilibre, positivité, solution définie sur tout temps...)

- C'est bien de programmer des choses soi-même (si on a le temps bien sûr) plutôt que d'utiliser des routines (programme tout faits), par exemple, pour les équations différentielles, même une méthode d'Euler explicite est bien vue.

- Simulations numériques de qualité.

- Le contenu est bien présenté et clair, les parties bien délimitées (en particulier pour la visioconférence).

b - Bilan global

Une bonne prestation malgré les conditions de travail inhabituelles. Des connaissances bien présentes, mais pouvant être mal utilisées (principe de Lax, EDP linéarisée...), bien que le niveau reste satisfaisant, et certains points sont bien réussis (EDO). La modélisation est ce qui a été le moins bien réussi. La note finale est de 15/20. Avec une partie modélisation mieux traitée, la note peut encore être améliorée, bien qu'il s'agisse déjà d'une prestation d'un bon niveau.