Formule de Stirling

Leçons 235,265

Théorème (Formule de Stirling)

$$\Gamma(x+1) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer l'équivalent:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

2. Etudier l'intégrale

$$\int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

lorsque $x \to +\infty$ et en déduire la formule à l'aide du théorème de convergence dominée.

Démonstration. *1. Soit $x>0$:*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t + \int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

Par un changement de variable $t=u+x$, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} (u+x)^x e^{-(u+x)}\mathrm{d}u\\ &\leq \int_x^{+\infty} (2u)^x e^{-(u+x)}\mathrm{d}u\\ &\leq \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

On a donc l'encadrement:

$$0 \leq \int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \leq \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

$\frac{2}{e}<1$ *donc on obtient:*

$$\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\Gamma(x+1)\right)$$

D'où:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \tag{1}$$

2. *Soit* $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2x} t^x e^{-t}\mathrm{d}t &\overset{t=u+x}{=} e^{-x}\int_{-x}^{x}(u+x)^x e^{-u}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x I_x\end{aligned}$$

où:

$$I_x = \int_{\mathbb{R}} f_x(u)\mathrm{d}u \ \textit{ et } \ f_x(u) = \chi_{]-x;x[}(u)\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}$$

Montrons que $\frac{I_x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$ *ce qui donnera l'équivalent demandé.*

On va pour cela utiliser le théorème de convergence dominée.

Si $u \in \,]-x;x[$, *alors:*

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u} = e^{x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-u} = e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right\}}$$

Soit $v \in]-1;1[$:

$$\ln(1+v) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}$$

Donc:

$$\ln(1+v) - v = -\frac{v^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}$$

- *Si* $v < 0$, *on a directement:* $\ln(1+v) - v \leq -\frac{v^2}{2} \leq -\frac{v^2}{6}$

- *Si* $v \geq 0$, *le théorème des séries alternées assure que:*

$$\left|\ln(1+v) - v + \frac{v^2}{2}\right| \leq \left|\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{n}\right| \leq \frac{v^3}{3}$$

Donc: $\ln(1+v) - v \leq \frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2} \leq \frac{v^2}{3} - \frac{v^2}{2} \leq -\frac{v^2}{6}$

Ainsi, si $\left|\frac{u}{x}\right| < 1$, *on obtient alors:*

$$e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right\}} \leq e^{-x\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{u}{x}\right)^2} \leq e^{-\frac{u^2}{6x}}$$

Donc on obtient pour tout $u \in \mathbb{R}, |f_x(u)| \leq e^{-\frac{u^2}{6x}}$

En posant $u = \sqrt{x}y$, on obtient finalement:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \left| f_x(\sqrt{x}y) \right| \leq e^{-\frac{y^2}{6}} \tag{2}$$

La fonction majorante est indépendante de x, intégrable et positive, ce qui vérifie l'hypothèse de domination.

De plus, on a:

$$\begin{aligned} e^{x\left\{\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right\}} &\underset{x\to+\infty}{=} e^{x\left\{\frac{y}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right\}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} e^{-\frac{y^2}{2}+o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_x(\sqrt{x}y) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

De plus, les fonctions $y \mapsto f_x(\sqrt{x}y)$ sont mesurables sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient finalement:

$$\frac{I_x}{\sqrt{x}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}y)\mathrm{d}y \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi, d'après 1, on en déduit que:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

■