Théorème Central Limite

Leçons 261,262,266

Théorème (Théorème Central Limite - TCL)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $Var(X_1) = \sigma^2$. Alors, en posant la somme suivante:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On a la convergence en loi suivante:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (loi normale centrée réduite)

Voici le plan de la démonstration du théorème:

1. Montrer que, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors sa fonction caractéristique est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\widehat{\mathbb{P}_X}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$
2. Montrer la convergence en loi en utilisant le théorème de Lévy, en montrant que $(1+\frac{x}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$

Montrons ainsi ce lemme:

Lemme (Fonction caractéristique pour une loi normale centrée réduite)

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ alors, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ on a: } \widehat{\mathbb{P}_X}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Démonstration.

$$\textit{Soit } t \in \mathbb{R} : \quad \widehat{\mathbb{P}_X}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx} \mathrm{d}x$$

On veut dériver par rapport à t:

- ⋆ *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}$.*
- ⋆ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à $t \mapsto ixe^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}$*
- ⋆ *Pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $|ixe^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}| \leqslant |x|e^{-\frac{1}{2}x^2}$, et $x \mapsto |x|e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc une majoration par une fonction intégrable, indépendante du paramètre t.*

En vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $\widehat{\mathbb{P}_X}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}_X}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{itx}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} ixe^{-\frac{1}{2}x^2}e^{itx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

De plus, une intégration par parties assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{1}{2}x^2}e^{itx}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]e^{itx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{itx}\right]\mathrm{d}x = it\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{itx}\mathrm{d}x$$

$$\textit{D'où, pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathbb{P}_X}'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{itx}\mathrm{d}x = -t\widehat{\mathbb{P}_X}(t)$$

Donc, puisque l'on a $\widehat{\mathbb{P}_X}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 1$, $\widehat{\mathbb{P}_X}$ *est solution de cette équation*

$$\textit{différentielle} \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \ \widehat{\mathbb{P}_X}'(t) = -t\widehat{\mathbb{P}_X}(t) \\ \widehat{\mathbb{P}_X}(0) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\widehat{\mathbb{P}_X}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

■

On peut maintenant prouver le TCL à proprement parler.

Démonstration. *Quitte à remplacer X_1 par $X_1 - \mu$, on peut supposer que $\mathbb{E}[X_1] = \mu = 0$. De même, quitte à remplacer X_1 par $\frac{X_1}{\sigma}$, on peut supposer que $Var(X_1) = \sigma^2 = 1$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite de variables aléatoires centrés réduites.*

$$\textit{Par indépendance des } X_n, \textit{ on a: } \quad \widehat{\mathbb{P}_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}}(t) = \left(\widehat{\mathbb{P}_{X_1}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad \textit{or, on a:}$$

$$\widehat{\mathbb{P}_{X_1}}(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}t^2 + o\left(t^2\right) \quad \textit{donc} \quad \widehat{\mathbb{P}_{X_1}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \quad \textit{soit finalement}$$

$$\left(\widehat{\mathbb{P}_{X_1}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{t\to 0}{=} \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

Pour n assez grand, on peut supposer que $-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \in]-1,1[$, donc il vient:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\mathbb{P}_{X_1}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n &\underset{t\to 0}{=} e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)} \\ &\underset{t\to 0}{=} e^{n\left(\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)} \\ &\underset{t\to 0}{=} e^{-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}\end{aligned}$$

Soit, finalement, si $t \to 0$:

$$\left(\widehat{\mathbb{P}_{X_1}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Ainsi, le théorème de Lévy donne bien la convergence souhaitée.

■