Théorème de Lax-Milgram et application

Domaines: Espaces de Hilbert, Équations aux dérivées partielles

Théorème (Théorème de Lax-Milgram)

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. Soient $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $l : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose que:

1. a est continue, i.e. il existe $C > 0$ tel que, pour tous $u, v \in H$, $|a(u, v)| \leqslant C \|u\| \|v\|$
2. a est coercive, i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2$
3. l est continuen i.e. il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $v \in H$, $|L(v)| \leqslant \beta \|v\|$

   alors il existe un unique $u \in H$ tel que:

$$\text{Pour tout } v \in H \quad , \quad a(u, v) = L(v) \tag{1}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer, via le théorème de Riez qu'il existe une application linéaire $A : H \to H$ tel que, pour tous $u, v \in H$, $a(u, v) = \langle Au|v\rangle$, et que A est injective.
2. Montrer que $Im(A)$ est fermé dans H.
3. Montrer que $Im(A)^{\perp} = \{0\}$
4. En déduire que A est bijective, et, en écrivant $L = \langle x_0|\cdot\rangle$ avec le théorème de Riez, conclure.

Démonstration. *1. Par continuité de a, pour $u \in H$, l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riez, il existe un unique $w \in H$ tel que $a(u, v) = \langle w|v\rangle$ pour tout $v \in H$. Notons $w = Au$. $A : H \to H$ est clairement une application linéaire.*

Par coercivité de a d'une part, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'autre part, on a:

$$\alpha \|u\|^2 \leqslant a(u, u) = \langle Au|u\rangle \leqslant \|Au\| \|u\|$$

on obtient ainsi, pour tout $u \in H$:

$$\alpha \|u\| \quad \leqslant \quad \|Au\| \tag{2}$$

Ainsi, si $Au = 0$, cette inégalité assure que $u = 0$, et montre l'injectivité de A, puisque A est linéaire.

2. *Montrons que $Im(A)$ est fermé. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Im(A)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w \in H$. Montrons que $w \in Im(A)$.*

   Par définition de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = Au_n$. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans H, c'est donc une suite de Cauchy:

$$\|w_m - w_n\| \;=\; \|Au_m - Au_n\|$$

   De plus, l'inégalité (2) assure que:

$$\|w_m - w_n\| \;\geqslant\; \alpha\,\|u_m - u_n\|$$

   Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également. C'est une suite d'éléments de H, qui est complet, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers une limite $u \in H$.

   Il reste à montrer que $w = Au$. Pa continuité de a, on a:

$$\|Au\|^2 = \langle Au|Au\rangle = a(u, Au) \leqslant C\,\|u\|\,\|Au\|$$

   Ainsi, on obtient:

$$\|Au\| \;\leqslant\; C\,\|u\|$$

   ce qui montre la continuité de A. Ainsi, $Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Au$, mais on a également $w_n = Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w$. Par unicité de la limite, on obtient ainsi $w = Au$, soit $w \in Im(A)$. $Im(A)$ est donc fermé.

3. *Soit $u \in Im(A)^{\perp}$. Pout tout $w \in Im(A)$, $\wedge u|w\rangle = 0$, i.e. pour tout $v \in H$, $\langle u|Av\rangle = 0$.*

   En particulier, pour $v = u$, on a $\langle u|Au\rangle = 0$. Or, la coercivité de a assure que:

$$\alpha\,\|u\|^2 \leqslant a(u,u) = \langle u|Au\rangle = 0$$

   Donc $u = 0$. Ainsi, on a $Im(A)^{\perp} = \{0\}$

4. *Par conséquent, on obtient $\overline{Im(A)} = H$, mais comme $Im(A)$ est fermé, on a: $Im(A) = \overline{Im(A)} = H$, donc A est surjective, et donc bijective (car aussi injective d'après le premier point).*

   De plus, L est une forme linéaire continue, donc, toujours d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un unique $x_0 \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $L(v) = \langle x_0|v\rangle$. Ainsi, le problème (1) se reformule ainsi:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall v \in H, \langle Au - x_0 | v \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Au = x_0\end{aligned}$$

Comme A est bijectif, il existe un unique $u \in H$ vérifiant l'équation $Au = x_0$, i.e. le problème (1) admet une unique solution $u \in H$.

■

Remarque. *$A : H \to H$ est bien linéaire. En effet, soient $u_1, u_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $v \in H$, on a:*

$$\begin{aligned} a(u_1, v) &= \langle Au_1 | v \rangle \\ a(u_2, v) &= \langle Au_2 | v \rangle \\ a(u_1 + \lambda v_2, v) &= \langle A(u_1 + \lambda v_2) | v \rangle \end{aligned}$$

De plus, les deux premières égalités assurent par bilinéarité de a que, pour tout $v \in H$,

$$a(u_1 + \lambda v_2, v) = \langle Au_1 + \lambda A v_2 | v \rangle$$

Donc, pour tout $v \in H$,

$$\langle A(u_1 + \lambda v_2) | v \rangle = \langle Au_1 + \lambda A v_2 | v \rangle$$

Ainsi, $A(u_1 + \lambda v_2) = Au_1 + \lambda A v_2$, ce qui montre la linéarité de A.

Application (Un problème elliptique 1D avec conditions de Dirichlet au bord)

Soient $f \in L^2(0,1)$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et $\lambda > 0$. On suppose qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $\alpha(x) \geqslant \alpha_0$.

Le problème elliptique

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \lambda u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

admet une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$ (la dérivée est prise au sens des distributions).

Démonstration. *Considérons $u, v \in \mathcal{D}(0,1)$. On a ainsi:*

$$-\int_0^1 (\alpha(x) u'(x))' v(x) \mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x) v(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) v(x) \mathrm{d}x$$

Une intégration par parties sur le terme de gauche assure que:

$$\int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

La densité de $\mathcal{D}(0,1)$ *dans* $H_0^1(0,1)$ *pour la norme* $||\cdot||_{H^1}$ *assure que l'on peut considérer la formule* (4) *pour* $u, v \in H_0^1(0,1)$, *qui est un espace de Hilbert. Posons alors:*

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x \\ L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leqslant ||\alpha||_{L^\infty} ||u'||_{L^2} ||v'||_{L^2} + \lambda ||u||_{L^2} ||v||_{L^2} \\ &\leqslant (||\alpha||_{L^\infty} + \lambda) \lambda ||u||_{H^1} ||v||_{H^1} \end{aligned}$$

Donc a *est continue, de constante de continuité égale à* $||\alpha||_{L^\infty} + \lambda$.

De plus, on a:

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_0^1 \alpha(x)v'(x)^2\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 v(x)^2\mathrm{d}x \\ &\geqslant \alpha_0 ||v'||_{L^2}^2 + \lambda ||v||_{L^2}^2 \\ &\geqslant \min(\alpha_0, \lambda) ||v||_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Donc a *est coercive, de constante de coercivité égale à* $\min(\alpha_0, \lambda)$.

Enfin, on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leqslant ||f||_{L^2} ||v||_{L^2} \\ &\leqslant ||f||_{L^2} ||v||_{H^1} \end{aligned}$$

Donc L *est continue, de constante de continuité égale à* $||f||_{L^2} ||v||_{L^2}$.

Par le théorème de Lax-Milgram, le problème:

$$\forall v \in H_0^1(0,1) \quad , \quad a(u,v) = L(v)$$

équivalent au problème (3), *admet donc une unique solution* $u \in H_0^1(0,1)$.

■