Théorème de Liouville

Leçons 243,245

Théorème (**Théorème de Liouville**)

1. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors f est constante.
2. Plus généralement, si ils existent $p \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant A + B|z|^p$, alors f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer que, si on a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors on a, pour tout $r > 0$:

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \quad = \quad 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

2. Montrer les estimations de Cauchy, i.e. pour tous $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $|a_n| \leqslant \frac{\sup_{\mathbb{D}(z_0,r)} |f|}{r^n}$

3. Conclure en utilisant le fait que, soit f est soit bornée, soit majorée en module par $A + B|z|^p$.

Démonstration. *1. f étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est développable en série entière sur tout le plan complexe, donc, pour tous $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, on a:*

$$\begin{aligned} f(z_0 + re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{ni\theta} \\ \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-ni\theta} \end{aligned}$$

Ainsi: $$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 = \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-ni\theta} f(z_0 + re^{i\theta})$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{ki\theta}\\ &= \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{(k-n)i\theta}\end{aligned}$$

Par convergence normale des séries entières, on peut donc intervertir somme et intégrale:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_k r^k e^{(k-n)i\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k\int_0^{2\pi} e^{(k-n)i\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(k-n)i\theta}\mathrm{d}\theta = \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & k\neq n\\ 2\pi & si & k=n\end{array}\right.$ *donc* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = 2\pi a_n r^n$

De plus, on a: $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}r^n e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$

Dev même, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}r^n e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})$ *converge normalement sur* $\mathbb{C}$

(car f est bornée). Donc on peut à nouveau intervertir séries et intégrales. On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}r^n\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}r^n(2\pi a_n r^n)\\ &= 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n}\end{aligned}$$

2. *Pour $n\in\mathbb{N}$, $r>0$, on a:*

$$2\pi|a_n|^2r^{2n}\leqslant 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n} = \int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\leqslant 2\pi\sup_{\mathbb{D}(z_0,r)}|f|^2$$

Donc on obtient l'estimation de Cauchy: $\displaystyle |a_n|\leqslant\frac{\sup_{\mathbb{D}(z_0,r)}|f|}{r^n}$

3. *On distingue les deux cas (le second est une généralisation du premier)*

   ⋆ *Dans le cas f est bornée sur $\mathbb{C}$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant C$. Donc pour tous $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $|a_n| \leqslant \frac{C}{r^n}$. On fait tendre r vers $+\infty$, et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$. Donc $f \equiv a_0$, i.e. f est constante*

   ⋆ *Plus généralement, si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant A + B|z|^p$, alors, via les estimations de Cauchy, on a, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $|a_n| \leqslant \frac{A+Br^p}{r^n}$. Si $n \geqslant p+1$, on fait tendre r vers $+\infty$, donnant ainsi $a_n = 0$.*

$$\text{Donc on obtient finalement, pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n (z - z_0)^n$$

   Donc f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

■