Autour du déterminant de Cayley-Menger.

C'est très joli quand on a compris. La preuve de la première proposition est à la fois astucieuse et calculatoire et méritent donc d'être admise. On doit pouvoir mentionner ce résultat dans les leçons de géométrie affine. Je n'ai pas compris le truc de Zavidovique avec la récurrence d'ordre 2, pour moi l'ordre 1 suffit mais ça n'est pas très important je crois.

On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de structure affine standard.

Définition. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points de $\mathbf{R}^n$ et $d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$ les distances associées. Le déterminant de Cayley-Menger est défini par :

$$\Gamma(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & d_{i,j}^2 & \\ \vdots & d_{i,j}^2 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant de taille $n+2$. On convient que $\Gamma(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Notons bien qu'on a seulement besoin des distances $(d_{i,j})$ pour définir un déterminant de Cayley-Meger et pas des points. C'est précisément le but du théorème de montrer le lien entre les deux.

Proposition. *La volume du parallélogramme*[1] *défini par les points $x_0, \ldots, x_n$ vérifie :*

$$\det(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \Gamma(x_0, \ldots, x_n).$$

Théorème. *Soient $(d_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ des réels positifs vérifiant :*

$$\forall i \neq j, \;\; d_{i,j} = d_{j,i} > 0 \quad et \quad d_{i,i} = 0.$$

Il y a équivalence entre :

(1) Il existe des points $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^n$ qui sont les sommets d'un simplexe non dégénéré avec $d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$.

(2) Pour toute sous-famille $i_1, \ldots, i_k$, le déterminant de Cayley-Menger associé aux distances $(d_{i_p,i_q})_{1 \leq p,q \leq k}$ est de signe $(-1)^k$.

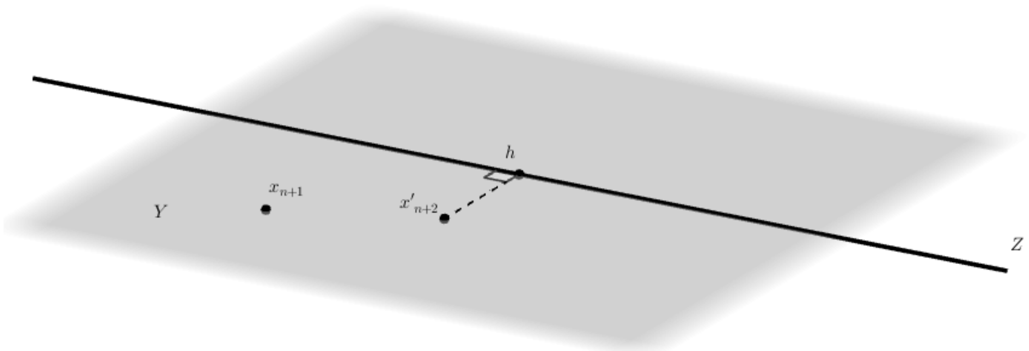
L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est donnée par la proposition précédente. On ne prouvera donc que la réciproque.

Preuve. On va procéder par récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant. En dimension 1, on place un point x_0 n'importe où puis un autre point à la distance voulue, le déterminant de Cayley-Menger associé vaut $2d^2 > 0$ et si on ne prend qu'un point on se rappelle qu'on a convenu qu'il valait -1. Place à l'hérédité.

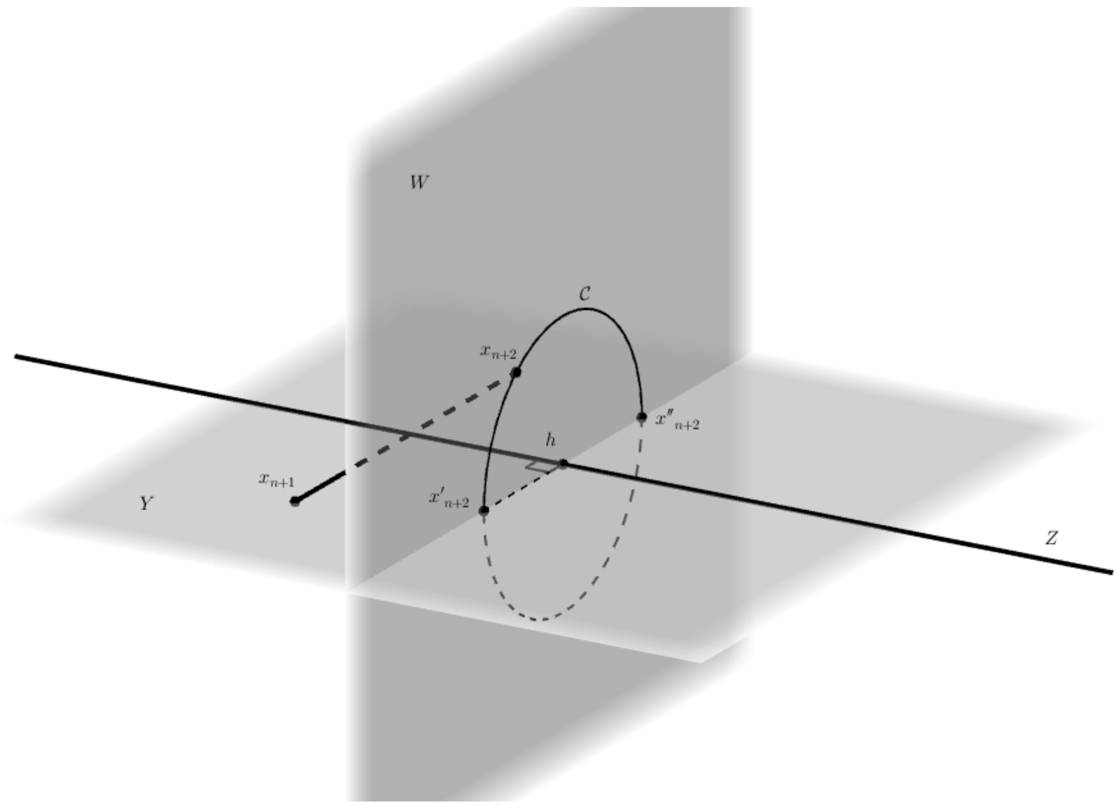
On se place dans $\mathbf{R}^{n+2}$, $n \geq 0$ et on se donne $(d_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n+2}$ des distances comme dans l'énoncé. La récurrence est d'ordre 1 mais on aura quand même besoin de se donner de la marge, d'où le $n+2$ et pas $n+1$.

1. Un simplexe est l'enveloppe convexe d'une base et un parallélogramme l'ensemble des combinaisons linéaires avec des coefficients dans $[0, 1]$ des vecteurs de la base. Le théorème de Fubini montre facilement que Volume(simplexe)=Volume(parallélogramme)$/n!$.

- On commence par appliquer l'hypothèse de récurrence avec les $(d_{i,j})_{0\leq i,j\leq n+1}$, cela donne naissance à $(n+2)$ points $x_0,\ldots,x_{n+1}$ qui engendrent un hyperplan (affine) dans $\mathbf{R}^{n+2}$, noté Y.
- Dans l'hyperplan Y qui est de dimension $(n+1)$, on note $Z\subset Y$ l'hyperplan affine de dimension n engendré par $x_0,\ldots,x_n$. On applique à nouveau l'hypothèse de récurrence avec les $(d_{i,j})_{i.j\in\{0,\ldots,n,n+2\}}$ en faisant coïncider les $(n+1)$ premiers points avec $x_0,\ldots,x_n$ (c'est possible à une isométrie affine près). Un nouveau point est né, on l'appelle $x'_{n+2}\in Y$. Comme le simplexe engendré par $x_0,\ldots,x_n,x'_{n+2}$ est non dégénéré, on est sûr que $x'_{n+2}\notin Z$.
- On projette orthogonalement x'_{n+2} sur Z et on appelle h son projeté.



- On appelle W le supplémentaire orthogonal de Z passant par h. Il est de dimension 2. On trace $\mathcal{C}$ le cercle inclus dans W de centre h et passant par x'_{n+2}. On appelle x''_{n+2} l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Y. Quitte à changer de nom, on suppose que x_{n+1} et x'_{n+2} sont du même côté comme sur le dessin.



On peut commencer à réfléchir. Par construction, pour tout $x \in \mathcal{C}$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a :

$$\|x - x_i\| = \|x'_{n+2} - x_i\| = d_{i,n+2}$$

et il ne reste plus qu'à trouver un point $x_{n+2} \in \mathcal{C}$ vérifiant :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = d_{n+1,n+2}.$$

Pour $\xi \in \mathbf{R}$, on définit

$$G(\xi) = \begin{vmatrix} & & & & 1 & 1 \\ & & & & d_{0,n+1}^2 & d_{n+2,0}^2 \\ & & \Gamma(x_0,\dots,x_n) & & d_{1,n+1}^2 & d_{1,n+2}^2 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & d_{n+1,0}^2 & d_{n+1,1}^2 & \dots & 0 & \xi \\ 1 & d_{n+2,0}^2 & d_{n+2,1}^2 & \dots & \xi & 0 \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant de Cayley-Menger d'un système de $(n+3)$ points dans lequel on a remplacé la distance $d_{n+1,n+2}$ par ξ. C'est un polynôme de degré 2 en ξ et en développant par rapport aux deux dernières colonnes, il est de la forme :

$$G(\xi) = -\Gamma(x_0, \dots, x_n)\xi^2 + a\xi + b, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Par hypothèse, $\Gamma(x_0, \dots, x_n)$ est de signe $(-1)^{n+1}$ et $G(d_{n+1,n+2}^2)$ est de même signe. De plus,

$$G(\|x_{n+1} - x'_{n+2}\|^2) = G(\|x_{n+1} - x''_{n+2}\|^2) = 0$$

car les simplexes correspondants sont dégénérés : tous les points sont dans l'hyperplan Y.

Comme G est un polynôme du second degré, $G(\xi)$ est de signe opposé au coefficient dominant lorsque :

$$\xi \in \left[\|x_{n+1} - x'_{n+2}\|^2, \|x_{n+1} - x''_{n+2}\|^2\right] = I.$$

Mais $d^2_{n+1,n+2} \in I$ car son image par G est du même signe. Or, quand x parcourt $\mathcal{C}$, $\|x - x_{n+1}\|^2$ parcourt I donc par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\, x_{n+2} \in \mathcal{C},\ \|x_{n+2} - x_{n+1}\| = d_{n+1,n+2}$$

$\square$

Adapté d'un travail TROP WAOOUH de l'inénarrable Grégoire Clarté.

Référence. M. Zavidovique, *Un max de maths*

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
152 Déterminant. Exemples et applications.