L'Équation de la chaleur dans un anneau

On peut tout faire en justifiant au fur et à mesure avec les théorèmes de Lebesgue, c'est un peu plus long mais on montre l'unicité en même temps et le développement rentre dans des leçons pas drôles. Cependant la preuve de l'unicité à partir de l'énergie transcrit une propriété importante de l'équation de la chaleur. On pourrait aussi parler du principe du maximum.

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur dans un anneau, c'est à dire le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x), & \text{pour tout } x \in [0,1] \text{ et tout } t > 0 \\ \lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x), & \text{pour tout } x \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction C^2 périodique (de période 1). On cherche u périodique de période 1 sous la forme :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n(t) e^{2i\pi nx}$$

où la sommation est pour l'instant purement formelle.

Étape 1 : analyse.

On effectue dans un premier temps des calculs purement formels pour déterminer les coefficients u_n. Le système (1) s'écrit alors : pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{cases} u_n'(t) = -4\pi^2 n^2 u_n(t) \\ \lim\limits_{t\to 0} u_n(t) = \displaystyle\int_{[0,1]} f(y) e^{-2i\pi ny} dy \end{cases}$$

On trouve pour tout $n \in Z$:

$$u_n(t) = \left(\int_{[0,1]} f(y) e^{-2i\pi ny} dy \right) e^{-4\pi^2 n^2 t}$$

et au prix d'une interversion $\sum$ et $\int$, on a :

$$u(t,x) = \int_{[0,1]} \left(\sum_{n\in Z} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t} \right) f(y) dy = K_t * f(x) \tag{2}$$

où on définit le *noyau de la chaleur* :

$$K_t(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi nx}$$

qui est bien défini comme somme d'une série de fonction normalement convergente sur tout compact de $]0,+\infty[\times[0,1]$.

Étape 2 : synthèse.

On vérifie que la fonction u définie en (2) est solution du problème de Cauchy (1). Comme pour tout $k \geq 0$ la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} n^k e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$$

est normalement convergente sur tout compact de $]0, +\infty[\times[0,1]$, on peut dériver sous l'intégrale en t et en x. De plus, les fonctions $(t,x) \mapsto e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$ sont solutions de l'équation de la chaleur donc il en est de même pour u. De plus, au prix d'une interversion $\sum$ et $\int$ qui est licite, on reconnaît lorsque $t = 0$ dans (2), la somme de la série de Fourier de f qui converge bien ponctuellement compte tenu de sa régularité.

Étape 3 : unicité de la solution

Par linéarité de l'équation, si u_1 et u_2 sont solutions de (1), alors $u = u_1 - u_2$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x), & \text{pour tout } x \in [0,1] \text{ et tout } t > 0 \\ u(0,x) = 0, & \text{pour tout } x \in [0,1] \end{cases}$$

Posons pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$E(t) = \int_0^1 (u(t,x))^2 dx.$$

On peut dériver sans crainte sous l'intégrale compte tenu du caractère compact de $[0,1]$ et de la régularité de u :

$$E'(t) = \int_0^1 2u(t,x)\partial_t u(t,x) dx = \int_0^1 2u(t,x)\partial^2_{xx} u(t,x) dx = -2\int_0^1 (\partial_x u(t,x))^2 dx.$$

où la dernière égalité provient d'une intégration par partie (le caractère 1-périodique de u permet d'annuler le terme de bord). Ainsi, E est positive et décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $E(0) = 0$, E est identiquement nulle, ce qui prouve que $u = 0$.

Le cas non périodique

Théorème. *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, alors il existe un et un seul élément $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathscr{S}(\mathbf{R}))$ tel que*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x), & \textit{pour tout } x \in \mathbf{R} \textit{ et tout } t > 0 \\ \lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x), & \textit{pour tout } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Preuve. La régularité de u nous autorise à prendre la transformée de Fourier de l'équation, qui devient alors :

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2 \hat{u}(t,\xi) \quad \text{et} \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Comme dans le cas périodique, c'est une équation différentielle simple à résoudre :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\hat{f}.$$

Et nécessairement,

$$u(t,x) = \mathscr{F}^{-1}(e^{-4\pi^2\xi^2 t}\hat{f})(x).$$

Comme on sait calculer la transformée d'une gaussienne, on peut écrire plus simplement,

$$u(t,x) = K_t * f(x)$$

où le noyau de la chaleur K_t est défini par :

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Compte-tenu de la régularité, on peut vérifier facilement que u ainsi défini est solution de l'équation de la chaleur. □

Remarque. On ne dit absolument rien sur l'existence ou l'unicité de la solution dans un autre cadre fonctionnel que celui-là. En particulier, on pourra vérifier que la fonction :

$$v(t,x) = \begin{cases} \frac{x}{t^3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale nulle. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $v(t) \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ mais v n'est bornée sur aucun voisinage de $(0,0)$ (donc même pas continue).

Références.

B. Candelpergher, *Calcul Intégral*
J. Rauch, *Partial differential equations*

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications. *(euh. . .)*
222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales. *(mais si)*
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. (lol)
246 Séries de Fourier. Exemples et applications.