Autour des sous-groupes distingués et des noyaux de caractères.

Lemme (Noyau des caractères)**.** *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ_V où V est un espace de dimension d. Alors*

$$K_{\chi_V} = \{g \in G,\ \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$$

est un sous-groupe distingué de G appelé noyau de la représentation.

Preuve. Soit $g \in G$ d'ordre k. Comme $g^k = 1$, on a $\rho(g)^k = Id$ donc $\rho(g)$ est annulé par un polynôme scindé à racines simples. C'est donc un endomorphisme diagonalisable et ses valeurs propres $\omega_1, \ldots, \omega_d$ sont des racines de l'unité. En particulier :

$$|\chi_V(g)| = |\omega_1 + \ldots + \omega_d| \leq d = |\chi_V(1)|.$$

Si $g \in K_{\chi_V}$, alors l'inégalité précédente est une égalité et les ω_i sont positivement liés. Nécessairement,

$$\omega_1 = \ldots = \omega_d = 1$$

et $\rho(g) = Id$. Réciproquement c'est aussi vrai donc

$$K_{\chi_V} = \mathrm{Ker}(\rho)$$

est un sous-groupe distingué. □

Soit G un groupe fini dont on note $\widehat{G} = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ le dual formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes.

Théorème. *Les sous-groupes distingués de G sont exactement du type*

$$\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i} \quad \textit{où} \quad I \subset \{1, \ldots, r\}.$$

Preuve. Soit $N \lhd G$ un sous-groupe distingué. On appelle U la représentation régulière de G/N, on sait qu'elle est fidèle, c'est à dire que ρ_U est injective.

(1) On note $\pi : G \to G/N$ la projection canonique et on pose :

$$\forall g \in G,\ \ \tilde{\rho}_U(g) := \rho_U \circ \pi(g).$$

Alors $\tilde{\rho}_U : G \to GL(U)$ est une représentation de G de noyau

$$\mathrm{Ker}(\tilde{\rho}) = \mathrm{Ker}(\rho \circ \pi) = N.$$

(2) Notons χ le caractère de $\tilde{\rho}_U$. D'après le lemme préliminaire, $N = K_\chi$.

(3) On décompose χ en fonction des caractères irréductibles :

$$\chi = a_1\chi_1 + \ldots + a_r\chi_r.$$

Comme dans la preuve du lemme, on a :

$$\forall g \in G,\ \ |\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i |\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i |\chi(1)| = \chi(1)$$

et $g \in K_\chi$ si et seulement si $\chi(g) = \chi(1)$ si et seulement si l'inégalité est une égalité si et et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\},\ a_i\chi_i(g) = a_i\chi_i(1).$$

On obtient finalement

$$g \in K_\chi \iff \Big[a_i > 0 \ \Rightarrow\ g \in K_{\chi_i}\Big].$$

et le résultat avec $I = \{i\ a_i > 0\}$.

Le réciproque est évidente puisqu'une intersection de sous-groupes distingués est un sous-groupe distingué. □

Corollaire. *G est simple si et seulement si*

$$\forall i \neq 1,\ \forall g \in G,\ \chi_i(g) \neq \chi_i(1).$$

Preuve. S'il existe $g \neq 1$ dans G tel que $\chi_1(g) = \chi_i(1)$ alors $K_i \subset G$ est un sous-groupe distingué non trivial donc G n'est pas simple. Réciproquement, si G n'est pas simple, il existe $g \in N$, $g \neq 1$ où $N \lhd G$ est un sous-groupe distingué. Le théorème précédent dit que :

$$N = \bigcap_{i \in I} K_i$$

donc $g \in K_i$ pour un certain i ce qui signifie encore que $\chi_i(g) = \chi_i(1)$. □

Référence. G. Peyré, *L'Algèbre discrète de la Transformée de Fourier*

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.