

exp : $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ EST SURJECTIVE

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Alors, $\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$. En particulier, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ est surjective et un antécédent de $A \in GL_n(\mathbf{C})$ est un polynôme (complexe) en A .

PREUVE. *Étape 1 : quelques résultats préliminaires.*

- On commence par observer l'égalité $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ où $\mathbf{C}[A]^\times$ est le groupe des inversibles de $\mathbf{C}[A]$. Seule l'inclusion \supset pose question : il s'agit de voir que l'inverse d'une matrice M est un polynôme en M (en effet le coefficient constant de son polynôme minimal est non nul : $\mu_M = \alpha + XP$ et $M^{-1} = -P(M)/\alpha$). Ainsi, l'inverse d'un élément de $\mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ reste dans $\mathbf{C}[A]$ (c'est un polynôme de polynôme en A)
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\exp(M) \in \mathbf{C}[M]$: en effet, c'est une limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (pour la norme d'algèbre) d'éléments de $\mathbf{C}[M]$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc fermé. En conséquence,

$$\exp : \mathbf{C}[A] \rightarrow \mathbf{C}[A]^\times$$

est un morphisme de groupes.

- $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]$. Il est aussi connexe par arcs (donc connexe) car si $M, N \in \mathbf{C}[A]^\times$, la fonction

$$z \in \mathbf{C} \mapsto \det(zM + (1-z)N)$$

est polynomiale en z et non nulle donc admet un nombre fini de zéros. 0 et 1 ne sont pas des zéros de ce polynôme donc on peut construire une courbe $z(t) \in \mathbf{C}$ reliant 0 et 1 en évitant ces zéros¹. Ainsi

$$t \in [0, 1] \mapsto z(t)M + (1-z(t))N$$

est une courbe tracée dans $\mathbf{C}[A]^\times$ reliant continûment N et M .

Étape 2 : exp est localement un difféomorphisme

Comme la différentielle de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ en 0 est l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a aussi en restreignant $\exp : \mathbf{C}[A] \rightarrow \mathbf{C}[A]^\times$:

$$d\exp(0) = id_{\mathbf{C}[A]}.$$

En particulier cette différentielle est bijective et le théorème d'inversion locale assure l'existence de deux ouverts $\mathcal{U} \subset \mathbf{C}[A]$ et $\mathcal{V} \subset \mathbf{C}[A]^\times$ contenant respectivement 0 et Id tel que $\exp : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme. Comme \exp est un morphisme de groupes, le résultat demeure au voisinage de chaque point $M \in \mathbf{C}[A]$:

$$\exp : M + \mathcal{U} \rightarrow \exp(M)\mathcal{V}$$

est un difféomorphisme.

¹On montre même que $\mathbf{R}^2 \setminus D$ où D est dénombrable est connexe par arcs

Étape 3 : un argument de connexité pour conclure.

L'étape 2 implique en fait que $\exp(\mathbf{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]^\times$. Mais c'est aussi un fermé en remarquant que

$$\mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A])} M \exp(\mathbf{C}[A])$$

(l'inclusion \supset se prouve par contraposée). En vertu de la connexité de $\mathbf{C}[A]^\times$, on conclut que

$$\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C}).$$

□

Une application

Proposition. *L'image par l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble*

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbf{R})\}.$$

PREUVE.

\subset : Il suffit de remarquer que $\exp(M) = \exp(\frac{1}{2}M)^2$

\supset : Soit $M = A^2$ où $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Comme A est réelle, on a aussi $\exp(\overline{P}(A)) = \overline{A} = A$ et donc

$$\exp((P + \overline{P})(A)) = A^2 = M.$$

□

Référence. M. Zavidovique, *Un max de maths*

156 Exponentielle de matrices. Applications.

204 Connexité. Exemples et applications.