Le processus de Galton-Watson.

Version périmée même pas terminée. En fait c'est mieux dans le livre de J. Walsh, Knowing the Odds et ENCORE MIEUX chez Grégoire Clarté.

Soient ξ_i^n, $i, n \geq 0$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{N}$. On note :

$$p_k = \mathbf{P}(\xi_i^k = k) \quad \text{et} \quad \mu = \mathbf{E}(\xi_i^m) \in (0, +\infty).$$

On définit :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{n+1} + \ldots + \xi_{Z_n}^{n+1} & \text{si } Z_n > 0 \\ 0 & \text{si } Z_n = 0 \end{cases}$$

Théorème. *Si $\mu > 1$, alors $\mathbf{P}(Z_n > 0, \text{ pour tout } n) > 0$.*

Preuve. Pour $s \in [0, 1]$, on définit la fonction génératrice :

$$\varphi(s) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k.$$

La preuve du théorème (et même un peu plus) découle de l'étude de φ et des trois lemmes suivants :

Lemme 1. *Si $\theta_m = \mathbf{P}(Z_m = 0)$, alors $\theta_m = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \theta_{m-1}^k = \varphi(\theta_{m-1})$.*

Preuve (lemme 1). □

Lemme 2. *La fonction génératrice est C^1 sur $[0, 1]$, croissante, convexe et $\varphi'(1) = \mu$.*

Preuve (lemme 2). La série entière $\sum_{k \geq 0} p_k s^k$ a un rayon de convergence égal à 1, on peut donc différentier à l'intérieur du disque ouvert de convergence. Pour tout $0 \leq s < 1$:

$$\varphi'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k s^{k-1} \geq 0.$$

De plus, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} k p_k s^{k-1}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$ (en norme infinie et parce que $\mu < +\infty$). Par un théorème de dérivation sous l'intégrale, on a la régularité et la croissance de demandée avec en prime $\varphi'(1) = \lim_{s \uparrow 1} \varphi'(s) = \mu$. Pour la convexité, on dérive une deuxième fois pour $0 \leq s < 1$:

$$\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \geq 0.$$

Dans l'intérieur, c'est gagné et par continuité et croissance, c'est aussi bon aux bords. □

Lemme 3. *Si $\mu > 1$, il existe un unique $\rho < 1$ tel que $\varphi(\rho) = \rho$.*

Preuve (lemme 3). D'abord, $\varphi(0) \geq 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = \mu > 1$ donc $\varphi(1-\varepsilon) < 1 - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit (écrire le développement de Taylor). En conséquence, $\varphi - id$ est continue, positive en 0 et négative en $1 - \varepsilon$: le théorème de Rolle assure l'existence d'un point fixe de φ dans $(0, 1)$.
Maintenant, si on suppose $\mu > 1$, il existe $k > 1$ tel que $p_k > 0$ et $\varphi'' > 0$ donc φ est strictement convexe dans $(0, 1)$. Donc si $\rho < 1$ est un point fixe de de φ, $\varphi(x) < x$ pour $x \in (\rho, 1)$. D'où l'unicité de ρ. □

Lemme 4. *Lorsque $m \uparrow \infty$ et en supposant $\mu > 1$, $\theta_m \uparrow \rho$.*

Preuve (lemme 4). Comme $\theta_0 = 0$, $\varphi(\rho) = \rho$ et φ est croissante donc $(\theta_m)_m$ est croissante et $\theta_m \leq \rho$. La suite converge vers $\theta_\infty \leq \rho$ et donc $\theta_\infty = \rho$. □

Remarquons que si $\mu \leq 1$, alors 1 est l'unique point fixe de φ et $\theta_m \to 1$. □

Référence. R. Durrett, *Probability : Theory and Examples.*

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
264 Variables aléatoire discrètes. Exemples et applications.