Une formule d'inversion de Fourier.

Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ on définit $\varphi(t) = \int e^{itx}\mu(dx)$ sa fonction caractéristique.

Théorème (Inversion)**.** *Si $a < b$, alors la limite suivante existe et vaut :*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}).$$

Preuve. On note :

$$I_T = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T}\int \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\mu(dx)dt.$$

Ensuite, on calcule bêtement :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx} &= \frac{e^{it(b-a)/2}-e^{-it(b-a)/2}}{it}e^{it(x-(a+b)/2)} \\
&= 2\frac{\sin\left(\frac{t(b-a)}{2}\right)}{t}\Big(\cos\big(t(x-(a+b)/2)\big) + i\sin\big(t(x-(a+b)/2)\big)\Big) \\
&= \frac{\sin\big(t(x-a)\big)}{t} - \frac{\sin\big(t(x-b)\big)}{t} + 2i\frac{\sin\big(t(b-a)/2\big)}{t}\sin\big(t(x-(a+b)/2)\big)
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, c'est la somme de trois fonctions continues en t donc intégrables sur $(-T,T)$. Par imparité, l'intégrale de la troisième fonction sur cet ouvert est nulle. Finalement, par le théorème de Fubini (qui est justifié car tout est intégrable) :

$$I_T = \int \left(\int_{-T}^{T}\frac{\sin\big(t(x-a)\big)}{t}dt - \int_{-T}^{T}\frac{\sin\big(t(x-b)\big)}{t}dt\right)\mu(dx).$$

On définit $R(\theta,T) := \int_{-T}^{T}\sin(\theta t)/t\ dt$. Un changement de variable donne :

$$R(\theta,T) = 2\int_0^{T\theta}\frac{\sin x}{x}dx = 2S(T\theta)$$

avec $S(T) := \int_0^T \sin x/x\ dx$. Une rapide étude de signe montre que :

$$\forall\theta\in\mathbf{R},\quad R(\theta,T) = 2\,\mathrm{sgn}(\theta)S(T|\theta|)$$

Et comme $S(T)\to\pi/2$ lorsque $T\to+\infty$, on a finalement :

$$R(x-a,T) - R(x-b,T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 2\pi & \text{si } a<x<b \\ \pi & \text{si } x=a \text{ ou } x=b \\ 0 & \text{si } x<a \text{ ou } x>b \end{cases}$$

Comme $|R(\theta,T)| \leq 2\sup_y S(y) < +\infty$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient :

$$I_T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\mu(a,b) + \pi\mu(\{a\}) + \pi\mu(\{b\}).$$

□

Théorème. *Si φ est intégrable sur $\mathbf{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, alors μ admet une densité continue et bornée :*

$$f(y) := \frac{1}{2\pi}\int e^{-ity}\varphi(t)dt.$$

Preuve. Puisque φ est intégrable, il en est de même de l'intégrande dans le théorème précédent et on peut écrire :

$$\mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\right|dt \leq \frac{b-a}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|\varphi(t)|dt.$$

Ce qui montre que μ n'a pas d'atome (prendre $b_n \downarrow a$) et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mu(x,x+h) &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{it}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \left(\int_x^{x+h} e^{-ity}dy\right)\varphi(t)dt \\
&= \int_x^{x+h}\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-ity}\varphi(t)dt\right)dy
\end{aligned}$$

où le théorème de Fubini justifie l'interversion. La continuité et la bornitude de f découlent du théorème de convergence dominée. □

Fait. $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Preuve. Pour $T > 0$:

$$\int_0^T dx\int_0^{+\infty} dy|e^{-xy}\sin x| = \int_0^T \frac{|\sin x|}{x}dx < \infty$$

donc on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty} dy\int_0^T dx\, e^{-xy}\sin x$$

et

$$\int_0^T e^{x(i-y)}dx = \frac{1}{1+y^2}(y+i)(1-e^{T(i-y)})$$

de sorte que :

$$\int_0^T e^{-xy}\sin x\, dx = \frac{1}{1+y^2}\big(1-e^{-yT}(y\sin T+\cos T)\big)$$

et on conclut en appliquant le théorème de convergence dominée. □

Référence. R. Durrett, *Probability : Theory and Examples*

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.