Le critère d'hypercyclicité de Kitaï.

Soit (E,d) un $\mathbf{C}$-espace vectoriel métrique complet et séparable dont S est une partie dénombrable dense. Soit A un endomorphisme continu de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *hypercyclique* pour A lorsque son orbite $\{A^n(x),\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans E. On note $HC(A)$ l'ensemble des points hypercycliques pour A.

Théorème. *$HC(A)$ est soit l'ensemble vide, soit un G_δ dense dans E.*

Preuve. Il est facile de voir que :

$$HC(A) = \{x \in E / \ \forall (s,k) \in S \times \mathbf{N}^*,\ \exists n \in \mathbf{N}^*,\ d(A^n(x), s) < 1/k\}. \qquad (1)$$

En termes ensemblistes :

$$HC(A) = \bigcap_{(s,k)\in S\times\mathbf{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} (A^n)^{-1}\big(B(s,1/k)\big)$$

Puisque S est dénombrable et A est continu, $HC(A)$ est bien une intersection dénombrable d'ouverts. Supposons que $HC(A) \neq \emptyset$ et prenons $x \in HC(A)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n(x) \in HC(A)$ (car une partie dénombrable dense privée d'un nombre fini de points reste dense) donc l'orbite de x, qui est dense, est contenue dans $HC(A)$ qui l'est tout autant. □

Lorsqu'on est dans le second cas, l'opérateur A est dit *hypercyclique*.

Théorème (Critère de Kitaï)**.** *Supposons qu'existent X et Y deux parties denses de E et $B : Y \to Y$ un opérateur vérifiant les trois conditions suivantes :*

$$(i)\ \ x \in X \Rightarrow A^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0; \quad (ii)\ \ y \in Y \Rightarrow B^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0; \quad (iii)\ \ y \in Y \Rightarrow AB(y) = y$$

alors A est hypercyclique.

Preuve. Reprenons l'égalité (1) que l'on écrit ici :

$$HC(A) = \bigcap_{(s,k)\in S\times\mathbf{N}^*} \Omega_{s,k}, \quad \text{où} \quad \Omega_{s,k} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} (A^n)^{-1}\big(B(s,1/k)\big)$$

Comme E est un espace métrique complet, il suffit de montrer que chacun des $\Omega_{s,k}$ est dense pour conclure que A est hypercyclique (c'est le théorème de Baire). Soient donc $b \in E$ que l'on cherche à approcher à $\varepsilon > 0$ près par un élément de $\Omega_{s,k}$. Puisque X et Y sont denses, posons pour $n \in \mathbf{N}$

$$\rho_n = x + B^n(y)$$

où $d(x,b) < \varepsilon/2$ et $d(y,s) < 1/(2k)$. Grâce à la condition (ii), on sait que pour $n \in \mathbf{N}$ suffisamment grand,

$$d(\rho_n, b) \leq d(\rho_n, x) + d(x,b) < \varepsilon.$$

De plus, comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, la condition (iii) implique :

$$A^n(\rho_n) = A^n(x) + y$$

on a pour n suffisamment grand et grâce à (i) :

$$d(A^n(\rho_n), s) \leq d(A^n(x), s) + d(y,s) < 1/k \quad i.e \quad \rho_n \in (A^n)^{-1}\big(B(s,1/k)\big) \subset \Omega_{s,k}$$

et la conclusion suit. □

Quelques applications

- Lorsque E est de dimension finie, A n'est jamais hypercyclique. En effet, quitte à décomposer E en somme directe des sous-espaces caractéristiques de A, on peut considérer que A est de la forme $A = \lambda Id + N$ où N est un endomorphisme nilpotent. Ainsi, notant d la dimension ambiante, on a pour tout $n \geq d$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Soit alors $x \in E$. En notant $y_k = N^k(x)$ pour $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, on a donc :

$$A^n(x) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k^{(n)} y_k.$$

Pour que cette orbite soit dense il faut d'une part que les y_k forment une base de l'espace et d'autre part que les suites $(\alpha_k^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ soient denses dans $\mathbf{C}$. Cette dernière condition n'est jamais réalisée puisqu'on peut voir que ces suites tendent en module ou bien vers 0 ou bien vers $+\infty$ ou bien sont de module constant.

- Soient $E = H(\mathbf{C})$ l'espace des fonctions entières (qui est métrisable, complet et séparable pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) et T l'opérateur de translation qui à $f \in H(\mathbf{C})$ associe l'application $z \mapsto f(z+1)$. On montre que T est hypercyclique en appliquant le critère de Kitaï avec l'opérateur

$$B : f \in H(\mathbf{C}) \mapsto T^{-1} f \in H(\mathbf{C}), \quad \text{où} \quad T^{-1} f(z) := f(z-1) \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{C}$$

et avec les parties

$$X = \left\{ z \mapsto e^{-z} P(z), \quad P \in \mathbf{C}[X] \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ z \mapsto e^{z} Q(z), \quad Q \in \mathbf{C}[X] \right\}$$

qui sont denses dans $H(\mathbf{C})$ puisque l'espace des polynômes complexes l'est pour la convergence uniforme sur tout compact (c'est le développement en série de Taylor).

- Dans le même esprit, on montre que l'opérateur de dérivation sur $H(\mathbf{C})$ est hypercyclique en considérant $X = Y = \mathbf{C}[X]$ et B l'opérateur qui à un polynôme associe son unique primitive nulle en zéro.

Référence. S. Gonnord, N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*

202 Exemples de parties denses et applications.
205 Espaces complets. Exemples et applications.
226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.