Sur la différentiabilité presque partout des fonctions à variation bornée et des fonctions lipschitziennes.

Il y a deux développements ici.

Le cas unidimensionnel des fonctions à variation bornée.

Théorème (Lebesgue)**.** *Une fonction à variation bornée est presque partout différentiable (au sens de la mesure de Lebesgue μ).*

Preuve. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ à variation bornée. On note D l'ensemble au plus dénombrable de ses points de discontinuité. On notera :

$$f^+(x) = \limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{et} \quad \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

et on définit les ensembles :

$$A^+ = \{x \in]a, b[\setminus D,\ f^+(x) = +\infty\},\ \ A^- = \{x \in]a, b[\setminus D,\ f^-(x) = -\infty\}$$

et

$$B = \{x \in]a, b[\setminus D,\ f^+(x) > f^-(x)\}.$$

Étape 1. Un lemme de recouvrement de Vitali.

Lemme (Vitali)**.** *Soient $(I_n =]x_n - r_n,\ x_n + r_n[)_{1 \leq n \leq N}$ N intervalle de $\mathbf{R}$. Il existe une partie $J \subset \{1, \ldots, N\}$ telle que les $(I_j)_{j \in J}$ soient deux à deux disjoints et :*

$$\bigcup_{n=1}^{N} I_n \subset \bigcup_{j \in J}]x_j - 3r_j,\ x_j + 3r_j[.$$

En particulier :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_n\right) \leq 3 \sum_{j \in J} \mu(I_j).$$

Preuve. On ordonne les rayons par ordre décroissant : $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_N$. On commence par considérer $J_1 \subset \{1, \ldots, N\}$ maximal telle que les $(I_j)_{j \in J_1}$ ne s'intersectent pas et soient de rayon r_1. Ensuite, soit $J_2 \subset \{1, \ldots, N\}$ maximal tel que les $(I_j)_{j \in J_2}$ soient de rayon r_2 et que les $(I_j)_{J_1 \cup J_2}$ ne s'intersectent pas. On définit de la même façon J_1, $J_2, \ldots, J_k$ et on pose $J = J_1 \cup \ldots J_k$. Cette partie convient puisque si $B(x', r') \cap B(x, r) \neq \emptyset$ entraîne $B(x', r') \subset B(x, 3r)$ donc toute boule éliminée est incluse dans une boule $B(x_j, 3r_j)$ pour un certain $j \in J$. $\square$

On utilisera le corollaire suivant : pour toute famille $(I_x)_{x\in X}$ d'intervalles ouverts de $]a,b[$, on peut d'abord extraire un recouvrement dénombrable $(I_{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ (séparabilité[1] de $\mathbf{R}$) puis en appliquant le lemme de Vitali à la famille $(I_{x_n})_{0\leq n\leq N}$ telle que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} I_{x_n}\right) \geq \frac{1}{2}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_{x_n}\right)$$

on peut affirmer[2] l'existence d'une partie finie F telle que les $(I_x)_{x\in F}$ sont deux à deux disjoints et

$$\sum_{x\in F}\mu(I_x) \geq \frac{1}{6}\mu\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right).$$

Étape 2. A^+ et A^- sont de mesure nulle.

Par l'absurde, si $\mu(A^+) > 0$ alors, pour tout $x \in A^+$ et tout $K > 0$, il existe un intervalle $I_x =]a_x, b_x[$ contenant x tel que

$$f(b_x) - f(a_x) > K(b_x - a_x)$$

(on trouve a_x ou b_x et on utilise la continuité de f en x pour trouver l'autre). L'étape 1 donne alors l'existence d'une partie finie F telle que

$$\frac{1}{K}\sum_{x\in F}(f(b_x) - f(a_x)) \geq \sum_{x\in F}\mu(I_x) \geq \frac{1}{6}\mu(A^+)$$

ce qui contredit le fait que f est à variation bornée puisque K est arbitraire.

Étape 3. On suppose par l'absurde que $\mu(B) > 0$.

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{Q}$, on définit :

$$C_{\alpha,\beta} = \{x \in B,\ f^+(x) > \beta + \alpha \ \text{ et } \ f^-(x) < \beta - \alpha\}$$

et puisque par densité de $\mathbf{Q}$: $B = \bigcup C_{\alpha,\beta}$, il existe par additivité dénombrable de la mesure un ensemble $C_{\alpha,\beta}$ de mesure strictement positive. Quitte à retrancher $x \mapsto \beta x$ à f, on peut supposer $\beta = 0$.

On va nier la rectifiabilité du graphe de f : prenons F une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b. On note a_F la fonction affine par morceau interpolant f aux points de F. Pour tout $x \in C_{\alpha,0} \setminus F$, on choisit $I_x =]a_x, b_x[$ contenu dans $]a,b[$, contenant x tel que $I_x \cap F = \emptyset$ et :

$$\begin{cases} f(b_x) - f(a_x) \leq -\alpha(b_x - a_x) & \text{si } a_F \text{ est croissante sur } I_x \\ f(b_x) - f(a_x) \geq \alpha(b_x - a_x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dans un contexte plus général, il s'agit d'un théorème de Lindelöf que l'on peut trouver dans *Analyse fondamentale* de S. Dolecki. Voici l'idée adaptée au contexte présent : on considère $\{B(a_n, 1/k)\}_{n,k} =: \{U_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ où a_n est une suite dense dans $\mathbf{R}$. On note $\mathcal{N} = \{n \in \mathbf{N},\ \exists x \in X,\ U_n \subset I_x\}$. Si $n \in \mathcal{N}$, on note $x_n \in X$ tel que $U_n \subset I_{x_n}$ et on voit que $\bigcup_{n\in\mathcal{N}} I_{x_n}$ convient.

2. Il est raisonnable d'admettre ça en lemme préliminaire avant de développer la preuve.

Par l'étape 1, il existe une partie finie $E \subset C_{\alpha,0} \setminus F$ telle que les $(I_x)_{x\in F}$ soient deux à deux disjoints et vérifient

$$\sum_{x\in E} \mu(I_x) \geq \frac{\mu(C_{\alpha,0})}{6}.$$

On pose $G = E \cup F$.

Étape 4. La longueur des graphes des fonctions affines par morceaux.

On notera $\ell(a_G)$ et $\ell(a_F)$ la longueur des graphes respectifs de a_F et a_G. Un dessin intelligent montre que :

$$\ell(a_G) \geq \ell(a_F) + (\sqrt{1+\alpha^2} - 1) \sum_{x\in E} \mu(I_x) \geq \ell(a_F) + \frac{\mu(C_{\alpha,0})}{6}(\sqrt{1+\alpha^2} - 1)$$

ce qui contredit la rectifiabilité du graphe de f, F étant arbitraire.

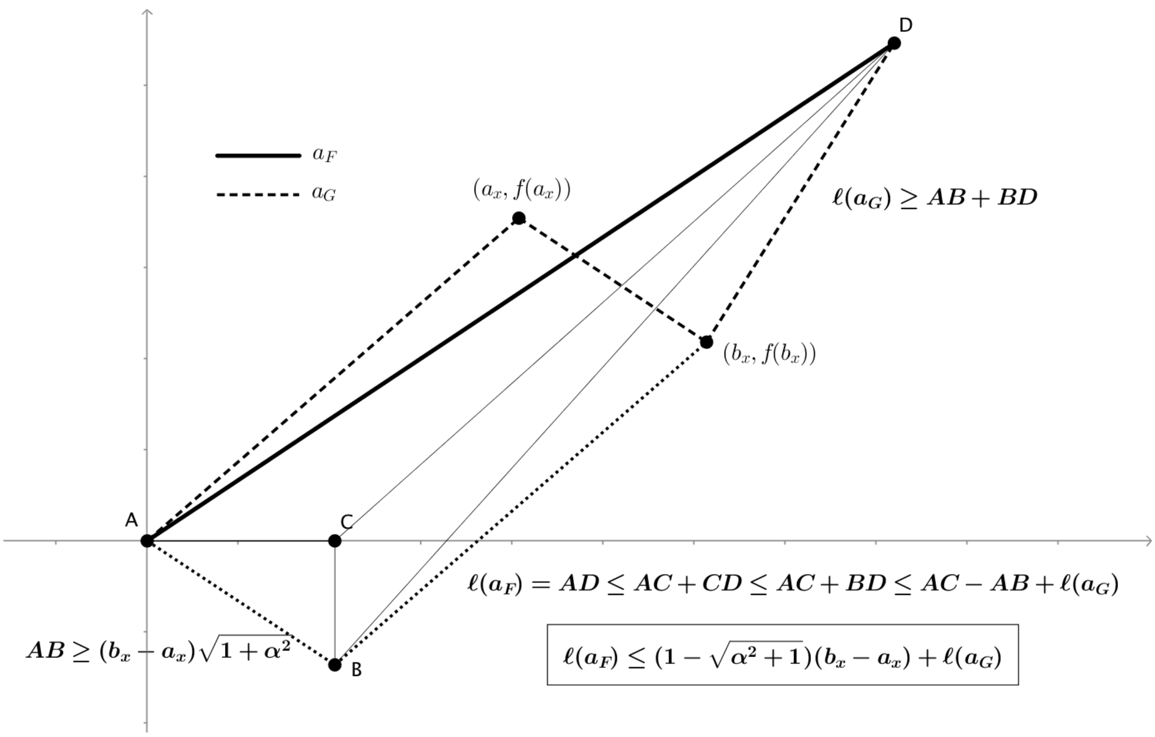

FIGURE 1: Un dessin intelligent. *"Autour de I_x"*.

□

Le cas multidimensionnel des fonctions lipschitziennes.

Théorème (Rademacher)**.** *Toute fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lipschitzienne est différentiable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue).*

PREUVE. On se ramène sans peine à des fonctions $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et on admet le cas $n = 1$ qui relève du paragraphe précédent puisque les fonctions lipschitziennes sont à variation bornée. On notera C une constante de Lipschitz de f. En particulier on sait que $\nabla f(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$ et si $e \in \mathbf{S}^{n-1}$, la dérivée directionnelle

$$L_x(e) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$. Ces fonctions sont mesurables et dans L^∞.

Étape 1. $L_x(e) = \langle \nabla(x), e \rangle$ au sens faible.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. D'une part, comme $\left| \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \right| \leq C$, le théorème de convergence dominée assure :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \varphi(x) dx \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbf{R}^n} L_x(e) \varphi(x) dx.$$

D'autre part, on a aussi toujours par convergence dominée :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x+te) - (x)}{t} \varphi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\varphi(x-te) - \varphi(x)}{t} f(x) dx \underset{t \to 0}{\longrightarrow} - \int_{\mathbf{R}^n} \langle \nabla \varphi(x), e \rangle f(x) dx.$$

Maintenant, en écrivant $e = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$, on développe le gradient et on utilise une dernière fois le théorème de convergence dominée pour justifier :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \langle \nabla \varphi(x), e \rangle f(x) dx &= \sum_{i=1}^n x_i \lim_{t \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\varphi(x+te_i) - \varphi(x)}{t} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lim_{t \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x-te_i) - f(x)}{t} \varphi(x) dx = - \int_{\mathbf{R}^n} \langle \nabla f(x), e \rangle \varphi(x) dx \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n), \quad \int_{\mathbf{R}^n} (L_x(e) - \langle \nabla f(x), e \rangle) \varphi(x) dx = 0$$

Étape 2. Pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$, $L_x(e) = \langle \nabla(x), e \rangle$.

En creux, il s'agit de prouver l'injection $L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Soit donc $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n), \quad \int_{\mathbf{R}^n} h(x) \varphi(x) dx = 0.$$

On montre que $h = 0$ presque partout sur toute boule $B(0,r)$, $r > 0$. On pose $g = h \mathbf{1}_{B(0,2r)}$ et on considère ρ_ε une suite régularisante telle que $\operatorname{Supp} \rho_\varepsilon \subset B(0, r_\varepsilon)$. On sait alors que $\rho_\varepsilon * g \to g$ dans $L^1(\mathbf{R}^n)$. Soit $x \in B(0,r)$, on a :

$$\rho_\varepsilon * g(x) = \int_{B(0,2r)} \rho_\varepsilon(x-y) g(y) dy = \int_{|x-y| \leq r_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) h(y) dy = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) h(y) dy$$

car $|x-y| \leq r_\varepsilon \Rightarrow |y| \leq |y-x| + |x| \leq 2r$ pour ε assez petit. Comme $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ est C^∞ à support compact, on a par hypothèse :

$$\rho_\varepsilon * g(x) = 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $g = 0$ presque partout dans $B(0,r)$ et la conclusion.

Étape 3. Dérivées directionnelles et différentiabilité.

On note A l'ensemble des points où $\nabla f(x)$ existe. Pour conclure quant à la différentiabilité de f, il suffit de montrer que la convergence :

$$\frac{f(x+te)-f(x)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \langle \nabla f(x), e\rangle$$

qui est vraie à $e \in \mathbf{S}^{n-1}$ fixé pour presque tout $x \in A$ est vraie **uniformément** en e.

Soit $(e_i)_{i\geq 1}$ une suite dense de $\mathbf{S}^{n-1}$. Par additivité dénombrable de la mesure,

$$B = \left\{ x \in A,\ \forall i \geq 1,\ \ \frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \langle \nabla f(x), e_i\rangle \right\}.$$

vérifie $\mu(\mathbf{R}^n \setminus B) = 0$. Soit $x \in B$, on définit pour $t \in \mathbf{R}$

$$\phi_t : e \in \mathbf{S}^{n-1} \longmapsto \frac{f(x+te)-f(x)}{t}.$$

Toutes ces fonctions sont C-lipschitziennes. Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de la sphère unité, il existe $i_1, \ldots, i_N$ tels que :

$$\mathbf{S}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(e_{i_k}, \varepsilon/2\widetilde{C})$$

où $\widetilde{C} = C + \|\nabla f(x)\|$. On découpe :

$$\begin{aligned}
|\phi_t(e) - \langle \nabla f(x), e\rangle| &\leq |\phi_t(e) - \phi_t(e_{i_k})| + |\phi_t(e_{i_k}) - \langle \nabla f(x), e_{i_k}\rangle| + |\langle \nabla f(x), e_{i_k} - e\rangle| \\
&\leq \widetilde{C}\|e - e_{i_k}\| + |\phi_t(e_{i_k}) - \langle \nabla f(x), e_{i_k}\rangle| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

pour t assez grand, dépendant seulement des $e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}$ qui sont en nombre fini. Ce qui conclut. □

Appendice : sur les fonctions à variation bornée.

Définition. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est dite à variation bornée lorsqu'elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) La variation totale de f définie par :

$$V_{a,b}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,\ a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b \right\}$$

est finie.

(ii) Le graphe de f est rectifiable au sens où si F est une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b et si a_F désigne la fonction affine par morceaux a_F interpolant f aux points de F,

$$\sup_F \ell(a_F) < \infty$$

où $\ell(a_F)$ est la longueur du graphe de a_F.

(iii) f est la différence de deux fonctions croissantes.

Preuve. L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ est immédiate[3] en considérant la norme 1 dans $\mathbf{R}^2$. L'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est aussi claire puisqu'une fonction croissante est à variation bornée. Pour la réciproque, il suffit de voir que $x \mapsto V_{a,x}(f)$ et $x \mapsto V_{a,x}(f) - f(x)$ sont croissantes. $\square$

La condition (iii) donne immédiatement : une fonction à variation bornée est continue sauf peut être sur un ensemble au plus dénombrable et une fonction à variation bornée est réglée.

Contre-exemple. La fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

est continue mais pas à variation bornée. Pour le voir, il suffit de considérer la subdivision :

$$\sigma_n : 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \ldots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Référence. S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'Analyse pour l'agrégation : Calcul Différentiel.*

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelles. Exemples et applications.
229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

3. Ou pas : $\ell(a_F) = \sum \|(x_{i+1}-x_i, f(x_{i+1})-f(x_i))\|_2 \simeq \sum \|(x_{i+1}-x_i, f(x_{i+1})-f(x_i))\|_1 \simeq b-a+V_{a,b}(f)$.