Une équation aux dérivées partielles linéaire sans solution.

On va dire que c'est culturel.
C'est le même John que dans John-Loewner je crois.

Théorème (Lewy)**.** *Il existe une fonction $F(x,y,t) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ telle que l'équation :*

$$Lu := \partial_x u + \partial u - 2i(x+iy)\partial_t u = F \tag{1}$$

n'admette pas de solution C^1 de dérivée Hölderienne, sur aucun ouvert $\Omega \in \mathbf{R}^3$.

Preuve. On commence par un lemme :

Lemme. *Soit $\psi(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. Si u est une solution C^1 de l'équation $Lu = \psi'(t)$ sur un voisinage ouvert Ω de l'origine, alors ψ est analytique en 0.*

Preuve. Si u est une telle solution, on note $x+iy = z$ et on pose pour $r < R$ et $|t| < R$, où R est petit :

$$V(r,t) = \int_{|z|=r} u(x,y,t)\,dz = i\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta, t) re^{i\theta} d\theta$$

Par la formule de Green, on a :

$$V(r,t) = i\int_{|z|\leq r} (\partial_x u + i\partial_y u)(x,y,t)dx\,dy = i\int_0^r\int_0^{2\pi}(\partial_x u + i\partial_y u)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\rho d\rho d\theta.$$

De sorte qu'en dérivant :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = i\int_0^{2\pi}(\partial_x u + i\partial_y u)(r\cos\theta, r\sin\theta, t) r d\theta = \int_{|z|=r}(\partial_x u + i\partial_y u)(x,y,t) r\frac{dz}{z}.$$

En posant $s = r^2$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} = \int_{|z|=r}(\partial_x u + i\partial_y u)(x,y,t)\frac{dz}{2z} \\ &= i\int_{|z|=r}\partial_t u(x,y,t)dz + \int_{|z|=r}\psi'(t)\frac{dz}{2z} = i\frac{\partial V}{\partial t} + \pi i\psi'(t).\end{aligned}$$

De sorte que la fonction $U(t,s) = V(s,t) + \pi\psi(t)$ vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + i\frac{\partial U}{\partial s} = 0.$$

C'est donc une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{0 < s < R^2,\ |t| < R\}$, continue sur le bord $s = 0$ et telle que $U(t,0) = \pi\psi(t) \in \mathbf{R}$. En posant $U(t,-s) = -\overline{U(t,s)}$, on vient de construire une fonction holomorphe sur un voisinage de 0. En particulier, $U(t,0) = \pi\psi(t)$ est analytique. $\square$

Le même argument montre que pour tout $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{R}^3$, l'existence d'une solution C^1 sur un voisinage de (x_0, y_0, t_0) pour

$$Lu(x, y, t) = \psi'(t + 2y_0 x - 2x_0 y)$$

implique l'analyticité de ψ en t_0.

À partir de maintenant, on considère une fonction périodique $\psi \in C^\infty$ qui n'est analytique nulle part et on note $\{Q_j = (x_j, y_j, t_j)\}_{j\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable dense dans $\mathbf{R}^3$. Comme ψ est périodique (donc toutes ses dérivées sont majorées), en prenant $c_j = 2^{-j}\exp(-|x_j| - |y_j|)$, on voit que la série :

$$F_\varepsilon(x, y, t) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \varepsilon_j c_j \psi'(t + 2y_j x - 2x_j y)$$

définit une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ pour toute suite $(\varepsilon_j)_j \in \ell^\infty$ avec

$$|F_\varepsilon| \leq M\|\varepsilon\|.$$

On va montrer qu'il existe un $\varepsilon \in \ell^\infty$ pour lequel le problème

$$Lu = F_\varepsilon \tag{2}$$

n'a pas de solution C^1 de dérivées Hölderiennes.

On commence par définir pour $j \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} E_j &= \big\{\varepsilon \in \ell^\infty,\ \text{le problème (2) a une solution locale } u \text{ sur un voisinage de } Q_j \text{ avec } u(Q_j) = 0\big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_{j,n} \end{aligned}$$

où $E_{j,n}$ est l'ensemble des $\varepsilon \in \ell^\infty$ tels qu'il existe $u \in C^1\big(B(Q_j, n^{-1/2})\big)$ vérifiant :

$$u(Q_j) = 0$$

$$|\partial^\alpha u| \leq n,\ \ |\alpha| = 1$$

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}^3,\ |\partial^\alpha u(P) - \partial^\alpha u(Q)| \leq n|P - Q|^{1/n},\ \ |\alpha| = 1$$

Lemme. *Les $E_{j,n}$ sont des fermés d'intérieur vide.*

Preuve. Soit $(\varepsilon^k)_k$ une suite d'éléments de $E_{j,n}$ qui converge vers $\varepsilon \in \ell^\infty$. Alors F_{ε^k} converge uniformément vers F_ε. On note (u_k) la suite des solutions associées aux (ε^k). Comme ces fonctions et leurs premières dérivées sont équi-continues, on peut extraire une sous suite qui converge vers u ainsi que ses premières dérivées (Ascoli). Cette solution vérifie $Lu = F_\varepsilon$ et toutes les propriétés voulues. Donc $E_{j,n}$ est fermé. Montrons par l'absurde qu'il est d'intérieur vide : si ε est dans l'intérieur de $E_{j,n}$, alors, en notant :

$$\delta = (0, \ldots, 0, 1/c_j, 0, \ldots) \in \ell^\infty$$

la suite

$$\varepsilon' = \varepsilon + \theta\delta$$

est aussi dans $E_{j,n}$ pour θ assez petit. Si u et u' sont les solutions associées à ε et ε', alors $u'' = (u' - u)/\theta$ vérifie :

$$Lu'' = F_\delta = \psi'(t_j + 2y_j x - 2x_j y)$$

et le premier lemme contredit la non analyticité de ψ en t_j. $\square$

On peut conclure. Par l'absurde, s'il existait une solution $u \in C^1(\Omega)$ au problème (1) avec une donnée F_ε sur un ouvert $\Omega \in \mathbf{R}^3$, alors par densité et quitte à poser $u - u(Q_j)$, il existe $j \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $\varepsilon \in E_{j,n}$. Autrement dit :

$$\ell^\infty \subset \bigcup_{j,n \in \mathbf{N}} E_{j,n}.$$

C'est impossible par le théorème de Baire puisque ℓ^∞ est complet et ne peut pas s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. $\square$

Quelques remarques complémentaires.

- Il y a plein de fonctions (périodiques) qui sont de classe $C^\infty(\mathbf{R})$ mais analytiques nulle part. En voici deux exemples (resp. [John] et Wikipédia) :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{(n!)^n} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{j \in \mathbf{N}} e^{-\sqrt{2^j}} \cos(2^j x).$$

  Voir une condition nécéssaire et suffisante d'analyticité dans [John].
- La condition d'Hölderiennité est artificielle : Hartmann a montré qu'elle était inutile.
- Le défaut d'analyticité est essentiel : en fait, si les données sont analytiques, le théorème de Cauchy-Kowaleski assure l'existence d'une solution locale.

Références.

F. John, *Partial Differential Equations*
G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations, Second Edition*

205 Espaces complets. Exemples et applications.
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.
222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.