Le théorème de Morgenstern sur les fonctions lisses analytiques nulle part.

C'est le même John que dans John-Loewner je crois.

Théorème (Morgenstern). *Il existe un G_δ dense de fonctions de $C^\infty([0,1],\mathbf{R})$ analytiques nulle part pour la topologie de la distance :*

$$\forall f,g \in C^\infty([0,1],\mathbf{R}),\ \ d(f,g) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \min\{2^{-n},\ \|(f-g)^{(n)}\|_\infty\}$$

qui fait de $C^\infty([0,1],\mathbf{R})$ un espace métrique complet.

Preuve. Pour $a \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ et $n \in \mathbf{N}$, on définit :

$$T(a,n) = \{f \in C^\infty([0,1],\mathbf{R}),\ \forall k \in \mathbf{N},\ |f^{(k)}(a)| \leq k!n^k\}$$

et on montre que c'est un fermé d'intérieur vide.

- Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions de $T(a,n)$ qui converge vers f pour la topologie de d. En particulier, pour tout $i \in \mathbf{N}$:

  $$\|f_k^{(i)} - f^{(i)}\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  ce qui entraîne la convergence simple de toutes les dérivées en a, de sorte que :

  $$\forall i \in \mathbf{N},\ |f^{(i)}(a)| \leq i!n^i \quad \text{et} \quad f \in T(a,n).$$

- Soient $f \in T(a,n)$ et $\varepsilon > 0$. Pour $A > 0$ et $b > 0$m=, on définit :

  $$f_{A,b}(x) = A\cos(b(x-a)).$$

  On va montrer que pour des valeurs intelligentes de A et b, la fonction

  $$s(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} f_{A,b}(x)$$

  est à distance $< \varepsilon$ de f mais n'appartient pas à $T(a,n)$. D'abord, on remarque que pour tout $k \in \mathbf{N}$:

  $$\|f_{A,b}^{(k)}\|_\infty = Ab^k \quad \text{et} \quad f_{A,b}^{(2k)}(a) = (-1)^k A b^{2k}.$$

  Puis on choisit :

  $$k \in \mathbf{N} \text{ tel que } \sum_{i\geq k} 2^{-i} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad b > 2 \text{ tel que } \varepsilon b^k \geq 4(2k)!n^{2k} \quad \text{et} \quad A = b^{-k}.$$

  De sorte que :

  $$d(s,f) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i-k} + \sum_{i\geq k} 2^{-i} < \varepsilon$$

  et

  $$|f^{(2k)}(a) - s^{(2k)}(a)| = \frac{\varepsilon}{2} |f_{b^{-k},b}^{(2k)}(a)| = \frac{\varepsilon}{2} b^{-k} b^{2k} > 2(2k)!n^{2k}$$

  ce qui prouve que $s \notin T(a,n)$ puisque $|f^{(2k)}(a)| < (2k)!n^{2k}$. Donc $T(a,n)$ est d'intérieur vide.

Maintenant, le théorème de Baire affirme que :

$$\bigcup_{a\in[0,1]\cap\mathbf{Q}} \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} T(a,n)$$

est d'intérieur vide. Son complémentaire est donc un G_δ dense et les fonctions qu'il contient ne sont analytiques nulle part. En effet, si f est analytique quelque part, disons en $a \in]0,1[$, alors f est analytique dans un voisinage de a donc par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ on peut déjà supposer sans peine que $a \in]0,1[\cap\mathbf{Q}$. De plus le critère d'Hadamard impose :

$$\sup_{k\in\mathbf{N}^*}\left\{\left(|f^{(k)}(a)|/k!\right)^{1/k}\right\} < +\infty$$

de sorte que $f \in T(a,n)$ pour n assez grand. □

Exemple. La fonction :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{(n!)^n}$$

est $C^\infty(\mathbf{R})$, 2π-périodique mais analytique nulle part.

- f n'est pas analytique en $x = 0$, car pour $k \in \mathbf{N}$:

  $$|f^{(2k)}(0)| = \sum_{n\geq 0}(n!)^{2k-n} \geq (k!)^k$$

  En particulier,

  $$\left(|f^{(2k)}(0)|/(2k)!\right)^{1/2k} \geq \frac{\sqrt{k!}}{(2k)!^{1/2k}} \sim c\frac{\sqrt{k!}}{(2k)^{3/2}} \to +\infty.$$

- Comme pour tout $n, m \in \mathbf{Z}$ avec $m \neq 0$, on a :

  $$x \mapsto f\left(x + 2\pi\frac{n}{m}\right) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\cos(k!x)}{k!^k}$$

  est analytique sur $\mathbf{R}$ et en particulier en $x = 0$, f n'est analytique en aucun point de la forme $x = 2\pi n/m$. Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, f n'est analytique nulle part.

Références.

M. Zavidovique, *Un Max de Maths.*
F. John, *Partial Differential Equations, 4th Edition.*

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.
205 Espaces complets. Exemples et applications.
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelles. Exemples et applications.
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.