Quaternions et rotations.

Quelques pré-requis

Définition (Réalisation matricielle des quaternions)**.** L'ensemble des quaternions $\mathbf{H}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ de la forme :

$$q = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}, \quad z, w \in \mathbf{C}$$

C'est une algèbre à division non commutative où l'inverse d'un élément q est donné par :

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{w} \\ -w & z \end{pmatrix}.$$

- Le corps $\mathbf{C}$ est le sous-corps de $\mathbf{H}$ constitué des matrices $\mathrm{diag}(z, \overline{z})$.
- La conjugaison quaternionique d'un élément q, notée $\overline{q}$, est définie comme la trans-conjuguée de la matrice qui le représente.
- La norme d'un élément $q \in \mathbf{H}$ est $N(q) = q\overline{q}$.

Proposition. *En tant qu'espace vectoriel,* $\mathbf{H}$ *est de dimension 4 et admet pour base :*

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ *et la multiplication entre les éléments de* $\mathbf{H}$ *est donnée par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl] & \\ j \arrow[rr] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- *Le sous-espace des quaternions imaginaires purs est* $\mathbf{I} = \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$.
- *Le centre de* $\mathbf{H}$ *est réduit aux quaternions réels* $\mathbf{R}$.
- *En écrivant* $q = x + yi + zj + tk$*, on a :*

$$\overline{q} = x - yi - zj - tk \quad \text{et} \quad N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

  et $N(qq') = N(q)N(q')$.
- *L'application* N *est une forme quadratique sur* $\mathbf{H}$ *associée à la forme bilinéaire* $(q, q') \mapsto \frac{1}{2}(q\overline{q}' + q'\overline{q})$.
- *La base* $(1, i, j, k)$ *est orthonormée. En particulier, le sous-espace des quaternions imaginaires purs* $\mathbf{I}$ *est l'orthogonal de* $\mathbf{R} = \mathbf{R}1$.

Ce qu'on va monter.

On note G le groupe des quaternions de norme 1, c'est à dire le noyau de l'homomorphisme de groupes $N : \mathbf{H}^* \to \mathbf{R}_+^*$.

Théorème. *Il existe un isomorphisme explicite :*

$$G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbf{R}).$$

Preuve. Il s'agit de remarquer que G agit par automorphsimes intérieurs sur $\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{rccccccc} S: & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbf{H}) & & & \\ & h & \longmapsto & S_h: & \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & & & & q & \longmapsto & hqh^{-1} = hq\overline{h} \end{array}$$

L'application linéaire S_h est bien un automorphisme, son inverse est donné par $S_{\overline{h}} = (S_h)^{-1}$. L'application S est bien un homomorphisme car $S_{h_1h_2}(q) = h_1h_2q\overline{h}_2h_1 = S_{h_1}S_{h_2}(q)$.

(1) Pour tout $h \in G$, l'application S_h respecte la norme. Comme 1 est central dans $\mathbf{H}$, l'application S_h préserve $\mathbf{R}$ et son orthogonal $\mathbf{I}$. On a donc le droit de restreindre $S : G \to \mathcal{O}(\mathbf{I})$. Via le choix d'une base qui donne un isomorphisme entre $\mathcal{O}(\mathbf{I})$ et le groupe orthogonal $\mathcal{O}(3, \mathbf{R})$, on en déduit un morphisme :

$$S : G \to \mathcal{O}(3, \mathbf{R}).$$

(2) En munissant $\mathcal{O}(3, \mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de sa topologie usuelle, on voit que l'application S est continue (on peut le voir en écrivant la matrice de S_h dans la base (i, j, k) dont les coefficients sont polynômiaux en les coordonnées de h). On peut écrire :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

de sorte que G est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^3$ et en particulier connexe. Ainsi, l'image $S(G)$ est aussi connexe et puisqu'elle contient l'identité, on dispose en fait d'un morphisme :

$$S : G \to SO_3(\mathbf{R}).$$

(3) Le noyau de S est $\mathrm{Ker}\, S = Z(\mathbf{H}) \cap G = \mathbf{R} \cap G = \{\pm 1\}$. Il ne reste plus qu'à montrer la surjectivité de S et on pourra conclure par théorème d'isomorphisme.

(4) Pour la surjectivité, il suffit de montrer que l'image $S(G)$ contient tous les retournements (car ils engendre $SO_3(\mathbf{R})$). Soit $h \in \mathbf{I} \cap \mathbf{S}^3$ et r_h le retournement d'axe $\mathbf{R}h$. On va montrer que $S_h = r_h$. Il suffit de voir que S_h laisse stable h (ce qui est évident car $S_h(h) = hhh^{-1} = h$) et de montrer que S_h est une involution :

$$(S_h)^2 = S_{h^2} = S_{-1} = Id$$

car $h \in \mathbf{I} \cap G$ donc $\overline{h} = -h$ et $h^2 = -h\overline{h} = -1$.

$\square$

Références.
H2G2
D. Perrin, *Cours d'algèbre*
A. Jeanneret, D. Lines, *Invitation à l'algèbre*

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
182 Applications des nombres complexes à la géométrie.
183 Utilisation des groupes en géométrie.