Le théorème de Riesz-Fischer sur la complétude des espaces L^p.

Théorème (Riesz-Fischer)**.** *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$*

Preuve. On traite d'abord le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N_k, \quad \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}.$$

C'est à dire qu'il existe E_k négligeable tel que

$$\forall x \in \Omega \setminus E_k,\ \forall m, n \geq N_k, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Soit $E = \cup_k E_k$ qui est négligeable. Pour tout $x \in \Omega \setminus E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Il existe donc $f(x)$ tel que $f_n(x) \to f(x)$. En passant à la limite $m \to +\infty$ dans la précédente inégalité, on obtient :

$$\forall x \in \Omega \setminus E,\ \forall n \geq N_k,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Donc $f \in L^\infty$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq 1/k$ pour tout $n \geq N_k$. Par conséquent $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$ ce qui conclut le premier cas.

Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p. On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

On va montrer que la suite (f_{n_k}) converge dans L^p. On pose :

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

de sorte que

$$\|g_m\|_{L^p} \leq 1.$$

Le théorème de convergence monotone assure la convergence presque partout de $(g_m)_m$ vers $g \in L^p$. D'autre part : pour $k \geq j \geq 2$:

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| + \ldots + |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq g(x) - g_{j-1}(x).$$

Il en résulte que presque partout, $(f_{n_k}(x))$ est une suite de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. Presque partout, on a :

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

donc $f \in L^p$. Enfin, on a $|f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0$ presque partout et $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq |g(x)|^p \in L^1$ donc par le théorème de convergence dominée, on a bien :

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^p} \to 0.$$

□

Proposition. *Soient* (f_n) *une suite de* L^p *et* $f \in L^p$ *telle que* $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$*. Alors il existe une sous-suite de* (f_n) *qui converge presque partout vers* f *et qui est uniformément majorée par une fonction de* L^p*.*

Preuve. Le résultat est évident pour $p = \infty$. Supposons donc que $1 \leq p < \infty$. Comme la suite est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) comme tout à l'heure. suivant la démonstration précédente, cette sous-suite converge presque partout vers une fonction $\tilde{f}$ avec presque partout :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad |\tilde{f}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x).$$

Donc $\tilde{f} \in L^p$ et comme tout à l'heure $f_{n_k} \to \tilde{f}$. Par unicité de la limite, on a $\tilde{f} = f$ presque partout. □

Référence. H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*

205 Espaces complets. Exemples et applications.
234 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.