Une formule de Taylor généralisée

C'est très calculatoire et assez inutile mais a une esthétique certaine. Ça vaut peut être le coup comme exemple dans la leçon 218 notamment.

Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{1}$$

Théorème. *Soient X une variable aléatoire réelle et f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que $f^{(n)}(X)$ soit intégrable pour tout n. Alors, la suite de polynômes $(q_n)_{n\geq 0}$ définie par :*

$$q_0 = 1, \qquad \frac{q_n'}{n!} = \frac{q_{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \int_{\mathbf{R}} q_n d\mathbf{P}_X = 0 \text{ pour tout } n \geq 1 \tag{2}$$

vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathbf{E}\big(f^{(n)}(X)\big)\frac{q_n(x)}{n!} + \mathbf{E}\left(\int_0^{x-X} \frac{q_N(x-s)}{N!} f^{(N+1)}(X+s)ds\right).$$

Preuve. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. On écrit en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x-y} \frac{q_N(x-s)}{N!} f^{(N+1)}(y+s)ds \\
&\quad = \frac{q_N(y)}{N!} f^{(N)}(x) - \frac{q_N(x)}{N!} f^{(N)}(y) + \int_0^{x-y} \frac{q_{N-1}(x-s)}{(N-1)!} f^{(N)}(y+s)ds \\
&\quad = \dots \\
&\quad = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{q_n(y)}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{q_n(x)}{n!} f^{(n)}(y)\right) + \int_0^{x-y} q_0(x-s) f'(y+s)ds \\
&\quad = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{q_n(y)}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{q_n(x)}{n!} f^{(n)}(y)\right)
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance de la variable aléatoire :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{q_n(X)}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{q_n(x)}{n!} f^{(n)}(X)\right)$$

on trouve :

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{q_n(X)}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{q_n(x)}{n!} f^{(n)}(X)\right)\right] = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n(x)}{n!} \mathbf{E}\big(f^{(n)}(X)\big)$$

qui est bien la formule annoncée. $\square$

Remarque. Les conditions (**??**) découlent de la relation :

$$\frac{e^{xz}}{\mathbf{E}(e^{Xz})} = \sum_{n\geq 0} \frac{q_n(x)}{n!} z^n \tag{3}$$

pour tout $x, z \in \mathbf{R}$ et dont on montre qu'elle est nécessaire en considérant le cas $f(x) = e^{xz}$.

Quelques exemples et applications

Pour des lois de probabilités bien choisies, on retrouve à peu de frais des développements asymptotiques classiques. Soit à partir de maintenant f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème pour les lois considérées.

- **La formule de Taylor usuelle.** Pour $\mathbf{P}_X = \delta_0$ on retrouve la formule de Taylor (**??**).
- **La formule d'Euler-MacLaurin.** Lorsque X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, les polynômes q_n sont les polynômes de Bernoulli B_n et :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{B_n(x)}{n!} \int_0^1 g^{(n)}(y)dy + \int_0^1 dy \int_0^{x-y} ds \frac{B_N(x-s)}{N!} g^{(N+1)}(y+s).$$

pour toute fonction g vérifiant les hypothèses du théorème. En particulier, si $g(x) = f(x+k)$ pour $k \in \mathbf{N}$, on trouve en $x = 0$:

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(y)dy + \sum_{n=1}^{N} \Big(f^{(n-1)}(k+1) - f^{(n-1)}(k)\Big) \frac{B_n(0)}{n!} \\ - \int_0^1 dy \int_0^y ds \frac{B_N(s)}{N!} f^{(N+1)}(y-s+k)$$

En intervertissant les intégrales dans le reste, il est égal à :

$$R_N^{(k)}(f) := -\frac{1}{N!} \int_0^1 dt\, B_N(t) \int_1^t dy\, f^{(N+1)}(y-t+k) = \frac{-1}{N!} \int_0^1 B_N(t) \Big(f^{(N)}(k+1-t) - f^{(N)}(k)\Big) dt.$$

Comme les polynômes de Bernoulli sont d'intégrale nulle, on trouve après changement de variable :

$$R_N(f) = \frac{-1}{N!} \int_k^{k+1} B_N(k+1-t) f^{(N)}(t)dt.$$

Pour $t \in [k, k+1]$, on peut écrire $k+1-t = 1-(t-\lfloor t \rfloor)$ et puisque $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$, on a finalement :

$$R_N^{(k)}(f) = \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_k^{k+1} B_N(t - \lfloor t \rfloor) f^{(N)}(t)dt.$$

Et il suffit de sommer k entre 1 et $n-1$ pour retrouver la formule d'Euler-MacLaurin :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(y)dy + \sum_{m=1}^{N} \Big(f^{(m-1)}(n) - f^{(m-1)}(1)\Big) \frac{B_m(0)}{m!} \\ + \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_1^n B_N(t - \lfloor t \rfloor) f^{(N)}(t)dt.$$

- **Le développement de Tchebychev-Hermite.** On considère cette fois $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. La relation (**??**) définit la suite des polynômes q_n, ce sont les polynômes de Hermite

$$q_n(x) = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \partial^n (e^{-x^2/2}).$$

Finalement,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} f^{(n)}(t) dt \right) \frac{H_n(x)}{n!} \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dy \; e^{-y^2/2} \int_0^{x-y} dt \frac{H_N(x-t)}{N!} f^{(N+1)}(y+t)$$

En intégrant n fois par parties, on voit que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} \partial^n f(t) dt = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} \partial^n (e^{-t^2/2}) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) H_n(t) e^{-t^2/2} dt.$$

En posant $\widetilde{H_n} = H_n / \sqrt{n!}$, on trouve :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle f, \widetilde{H_n} \rangle \widetilde{H_n} + R_N(f).$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) g(t) e^{-t^2/2} dt$$

et où $R_N(f)$ est un reste explicitement calculable dont on montre qu'il tend vers 0 en norme 2 pour le produit scalaire considéré. En particulier, on retrouve (en partie) le fait que les polynômes de Hermite modulo une constante forment une base hilbertienne pour le produit scalaire considéré.

Référence. Bernard Candelpergher, *Théorie des probabilités*