Rapport de stage

Asservissement visuel avec des miroirs

Benjamin Fasquelle
École Normale Supérieure de Rennes
Département Informatique et Télécommunications
Stage de première année

INRIA Rennes - Équipe LAGADIC
Encadrant: Éric Marchand

13 juillet 2016

Résumé

L'asservissement visuel désigne le contrôle d'un système dynamique (ou robot) par l'utilisation d'informations visuelles issues d'une caméra. Nous allons déterminer des lois de commande pour effectuer de l'asservissement avec des miroirs. En particulier, nous nous intéresserons à la commande d'un miroir monté sur l'effecteur robot. Nous travaillerons avec des miroirs plans et des droites, puis sur des miroirs sphériques. Nous exposerons les résultats expérimentaux avec les miroirs plans.

Mots-clés : Asservissement visuel ; Robotique ; Miroir ; Droites

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Contexte **3**

2.1 Asservissement visuel 3

2.2 Utilisation des miroirs avec l'asservissement visuel 4

3 Miroirs plans **4**

3.1 Modèles de réflexion et de projection 4

3.1.1 Réflexion de la droite dans l'espace 4

3.1.2 Projection de la droite dans le plan de la caméra 5

3.2 Asservissement visuel avec un miroir 6

3.2.1 Les trois configurations possibles 6

3.2.2 Contrôle de la position du miroir 7

3.3 Utilisation des degrés de libertés non-exploités 8

3.3.1 Nombre de degrés de liberté utilisés pour l'asservissement 8

3.3.2 Maintien de la cible dans le miroir 9

3.4 Résultats expérimentaux 10

3.4.1 Présentation des expériences 10

3.4.2 Résultats obtenus 12

4 Miroirs sphériques **12**

4.1 Similarité avec les miroirs plans 14

4.2 Estimation de la loi de commande 15

4.3 Cas du miroir fixe 17

5 Conclusion **17**

1 Introduction

Le principe de l'asservissement visuel est de calculer les mouvements qu'un robot doit effectuer pour se trouver dans une position donnée par rapport à une cible, à l'aide d'images acquises par une caméra. On en trouve des applications dans l'aéronautique : automatisation d'atterrisage, de ravitaillement en vol, ou encore dans le contrôle de drônes, mais également dans d'autres domaines tels que la production de machines [11].

L'utilisation de données visuelles a déjà amené à l'utilisation de miroirs dans l'asservissement visuel. En effet, les miroirs permettent d'obtenir plus d'informations, que ce soit grâce à l'observation d'un objet et de son reflet simultanément, ou par l'élargissement du champ de vision avec des miroirs convexes. Cependant, dans ces utilisations, le miroir est immobile par rapport à la caméra. Il pourrait être intéressant d'utiliser le mouvement du miroir : par exemple, on pourrait s'en servir pour le contrôle d'un laser [3].

Nous allons donc nous intéresser aux cas de déplacements entre le miroir et la caméra. Nous commencerons par l'étude théorique de l'asservissement visuel sur des droites avec des miroirs plans, puis nous présenterons nos résultats expérimentaux, ainsi que l'utilisation de tâches secondaires utiles en pratique. Enfin, nous étudierons le cas du miroir sphérique, dans lequel nous essayons de nous ramener au cas du miroir plan.

2 Contexte

2.1 Asservissement visuel

L'asservissement visuel correspond à l'utilisation de données visuelles (obtenues par exemple avec une caméra) pour contrôler les mouvements d'un robot. Il y a plusieurs configurations possibles : la caméra peut être montée sur le robot, se déplaçant donc avec ce dernier, ou être fixe et observer le mouvement du robot. Ce peut être aussi la cible qui est montée sur le robot.

Quelque soit le cas, le but est d'amener la cible à une certaine position par rapport à la caméra ou au robot. Présentons ici rapidemment le cas de la caméra montée sur le robot, avec une cible immobile [5]. Les données connues de la cible dans la position désirée sont regroupées dans un vecteur $\mathbf{s}^*$: ce sont par exemple les coordonnées de points ou de droites caractérisant le cible. Si les données de la position actuelle de la cible sont représentées par le vecteur $\mathbf{s}$, le but est alors de minimiser l'erreur définie par :

$$\mathbf{e} = \mathbf{s} - \mathbf{s}^* \tag{1}$$

On souhaite également avoir une décroissance exponentielle de l'erreur ($\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e}$ avec $\lambda > 0$). Comme la cible est supposée immobile, on a : $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{s}}$. La relation entre le déplacement de la cible dans l'image et la vitesse donnée à la caméra est donnée par :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{L}\mathbf{v}_c \tag{2}$$

où $\mathbf{v}_c$ est la vitesse instantannée donné à la caméra et $\mathbf{L}$ est la matrice d'interaction relative à $\mathbf{s}$.

On peut donc déterminer la vitesse à donner à la caméra pour réduire notre erreur :

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \mathbf{L}^+ \mathbf{e} \tag{3}$$

où $\mathbf{L}^+$ est la matrice pseudo-inverse de $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}^+ = (\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T$).

On a alors défini une loi de commande afin d'amener la cible à la position désirée dans l'image de la caméra : on procède par itération, et à chaque itération, on mesure l'erreur et les données de $\mathbf{s}$, on calcule la vitesse à donner au robot et on lui applique cette dernière.

2.2 Utilisation des miroirs avec l'asservissement visuel

L'asservissement visuel employant des miroirs plans ont déjà utilisés, par exemple pour obtenir plus d'informations sur le positionnement de la cible grâce à l'observation de la cible et de sa réflexion dans le miroir [7]. Les miroirs sont aussi souvent utilisés pour augmenter le champ de vision, et peuvent être ainsi couplé à l'asservissement visuel. Par exemple, une caméra et deux miroirs plans peuvent être employés afin de contrôler un alignement fait par une micro-machine [11], mais on peut aussi coupler une caméra et un miroir convexe pour obtenir une vision omnidirectionnelle [10] [6].

Cependant, dans toutes ces utilisations, le miroir est fixe dans le repère de la caméra : les utilisations demandent une configuration stricte, par exemple la caméra doit être placée de manière à vérifier la contrainte du point central unique, c'est-à-dire qu'elle doit être positionnée dans l'axe de symétrie du miroir. Nous allons dans nos travaux déplacer la caméra ou le miroir.

3 Miroirs plans

3.1 Modèles de réflexion et de projection

Tout d'abord, nous allons étudier la réflexion d'une droite avec un miroir et sa projection dans un plan. Nous nous servirons ensuite des résultats obtenus pour construire une loi de commande.

3.1.1 Réflexion de la droite dans l'espace

Nous associerons lors de nos calculs un miroir plan à un plan de l'espace.

Dans l'espace (c'est-à-dire en 3 dimensions), nous allons définir une droite par un point $\mathbf{X}$ et un vecteur directeur unitaire $\mathbf{u}$: $D = (\mathbf{X}, \mathbf{u})$. Nous avons d'abord besoin de calculer les coordonnées de l'image de la droite, puisque c'est celle-ci qui est observée par la caméra.

Soit $\mathcal{F}_c$ le repère de la caméra. Définissons le repère du miroir $\mathcal{F}_m$ (voire Figure 1) tel que les axes x et y soient dans le plan du miroir et l'axe z soit perpendiculaire à ce même plan. L'équation du miroir dans ce repère est :

$$ {}^m\mathbf{n}^{T\,m}\mathbf{X} = 0 \tag{4} $$

où ${}^m\mathbf{n} = (0\ \ 0\ \ 1)^T$ est la normale au miroir, exprimée dans le repère du miroir.

Soit la droite $({}^m\mathbf{X}_R, {}^m\mathbf{u}_R)$ la réflexion de la droite $({}^m\mathbf{X}, {}^m\mathbf{u})$ par le miroir, exprimée dans le repère du miroir. Les deux droites sont symétriques par rapport au plan du miroir. Les

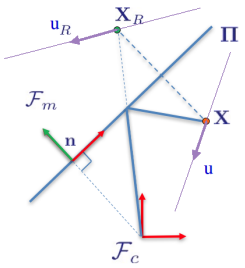

FIGURE 1 – Miroir plan et réflexion

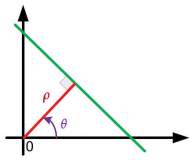

FIGURE 2 – Représentation (ρ, θ)

coordonnées de $({}^m\mathbf{X}_R, {}^m\mathbf{u}_R)$ sont :

$$\begin{cases} {}^m\mathbf{X}_R = (\mathbf{I} - 2{}^m\mathbf{n}{}^m\mathbf{n}^T){}^m\mathbf{X} \\ {}^m\mathbf{u}_R = (\mathbf{I} - 2{}^m\mathbf{n}{}^m\mathbf{n}^T){}^m\mathbf{u} \end{cases} \tag{5}$$

Soit $({}^c\mathbf{X}, {}^c\mathbf{u})$ les coordonnées de la droite dans le repère de la caméra. Sa position dans le repère du miroir est donnée par :

$$\begin{cases} {}^m\mathbf{X} = {}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{X} + {}^m\mathbf{t}_c \\ {}^m\mathbf{u} = {}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{u} \end{cases} \tag{6}$$

Soit

$$\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X} = d \tag{7}$$

l'équation du miroir dans le repère de la caméra ($||\mathbf{n}|| = 1$ et $d > 0$). Soit $\mathcal{F}_m$ un repère attaché au miroir tel que (voire Figure 1) :

$${}^c\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} {}^c\mathbf{R}_m & {}^c\mathbf{t}_m \\ \mathbf{0}_{3\times1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^c\mathbf{R}_m & d\mathbf{n} \\ \mathbf{0}_{3\times1} & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Soit $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ l'image de $({}^c\mathbf{X}, {}^c\mathbf{u})$ par rapport au miroir, dont les coordonnées sont exprimées dans le repère de la caméra. Les coordonnées de $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ sont (voire démonstration en annexe) :

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{X}_R = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X} + 2d\mathbf{n} \\ {}^c\mathbf{u}_R = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{u} \end{cases} \tag{9}$$

3.1.2 Projection de la droite dans le plan de la caméra

Pour la droite dans l'image perçue par la caméra (en deux dimensions), nous allons utiliser la représentation (ρ, θ), où θ est l'angle entre la ligne et l'axe x, et $|\rho|$ est la distance entre la ligne et l'origine du repère (voire Figure 2). Avec cette représentation, l'équation d'une droite est :

$$x\, cos(\theta) + y\, sin(\theta) - \rho = 0 \tag{10}$$

Cette représentation a l'avantage d'être minimale, mais elle présente des ambiguités : $(\rho, \theta \pm 2k\pi)$ et $(-\rho, \theta \pm (2k+1)\pi)$ représentent la même droite. Pour éviter de possibles discontinuités dans la loi de commande, nous prendrons θ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette intervalle provient en particulier du modèle de projection, où la fonction arctangente apparaît.

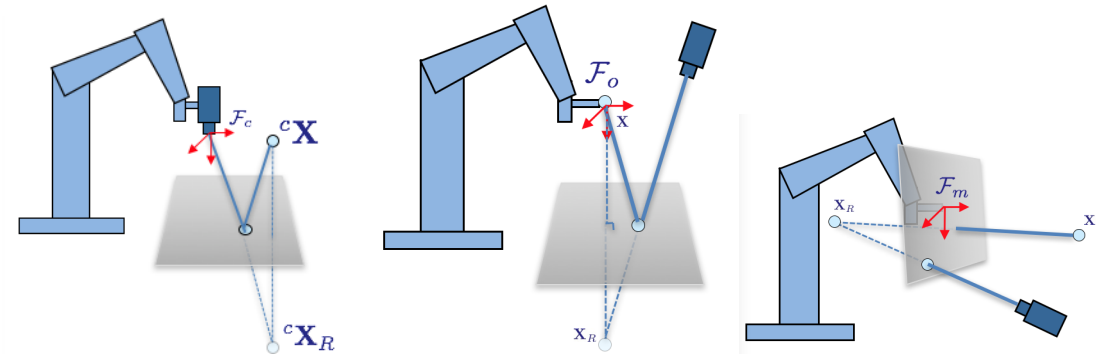

FIGURE 3 – De gauche à droite : Cas 1 : caméra mobile, Cas 2 : cible mobile, Cas 3 : miroir mobile

En effet, la projection $(\rho, \theta)^T$ d'une droite $(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = (\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix})^T$ est donnée par :

$$\begin{cases} \theta = arctan(\frac{u_y}{u_x}) \\ \rho = \frac{X}{Z}cos(\theta) + \frac{Y}{Z}sin(\theta) \end{cases} \tag{11}$$

3.2 Asservissement visuel avec un miroir

3.2.1 Les trois configurations possibles

Le but recherché est d'obtenir, dans l'image de la caméra, la réflexion de la cible par le miroir à une position voulue. Il y a trois configurations possibles pour un tel asservissement (voir Figure 3) :

— Cas 1 : La caméra est mobile (montée sur le robot), tandis que la cible et le miroir sont immobiles.
— Cas 2 : La cible est mobile, tandis que la caméra et le miroir sont immobiles.
— Cas 3 : Le miroir est mobile, tandis que la caméra et la cible sont immobiles.

Quelque soit le cas, le but est de minimiser l'erreur entre la position désirée de la cible dans l'image et la position réelle.

Dans le premier cas, seule la caméra est mobile. L'image de la cible par le miroir est donc immobile. On peut donc effectuer un asservissement visuel classique (avec caméra mobile) sur l'image de la cible par le miroir.

Dans le second cas, seule la cible est mobile. Les mouvements de l'image de la cible par le miroir sont donc directement liés aux mouvements de la cible, et on peut donc ici aussi se ramener à un asservissement visuel classique (avec cible mobile) sur l'image de la cible par le miroir.

Nous allons donc nous intéresser dans la suite de ce rapport au troisième cas seulement, dans lequel le miroir est monté sur le robot.

3.2.2 Contrôle de la position du miroir

Les travaux sont effectués avec un bras-robot à 6 degrés de liberté (3 en translation et 3 en rotation), et la cible considérée est une ligne. Les informations utilisées pour situer la ligne dans l'image sont ses paramètres (ρ, θ). Ainsi, nous allons chercher la matrice d'interaction $\mathbf{L_d}$ définie par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{L_d} \begin{pmatrix} {}^c\mathbf{v}_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

De plus, $\mathbf{L_d}$ doit être exprimée seulement avec les données connues (c'est-à-dire que l'on peut mesurer dans l'image), qui sont les coordonnées du miroir ($\mathbf{n}$ et d) et les coordonnées de l'image de la droite (c'est sa projection qui est observée, ainsi seules sa profondeur et son orientation en profondeur sont inconnues). Nous allons commencer par calculer le lien entre le mouvement de la droite dans l'image de la caméra (en 2D) et celui de l'image de la droite (en 3D), puis nous calculerons le lien entre le mouvement du miroir et le mouvement de l'image de la droite réfléchie (en 3D), ce qui nous donnera la matrice d'interaction recherchée.

Nous allons donc d'abord calculer le lien entre le mouvement de la droite 2D (dans l'image) et le mouvement de l'image 3D de la droite par le miroir. Le Jacobien liant $(\dot{\rho}, \dot{\theta})$ et $({}^c\dot{\mathbf{X}}_R, {}^c\dot{\mathbf{u}}_R)$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} {}^c\dot{\mathbf{X}}_R \\ {}^c\dot{\mathbf{u}}_R \end{pmatrix} \tag{13}$$

où

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a\,cos(\theta) & a\,sin(\theta) & -a^2(Xcos(\theta) + Ysin(\theta)) & -ab(Ycos(\theta) - Xsin(\theta)) & ac(Ycos(\theta) - Xsin(\theta)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & c & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

avec

${}^c\mathbf{u}_R = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, ${}^c\mathbf{X}_R = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $a = \frac{1}{Z}$, $b = \frac{u_y}{u_x^2+u_y^2}$ and $c = \frac{u_x}{u_x^2+u_y^2}$.

Démonstration. : D'après (11), nous avons :

$$\dot{\theta} = -\dot{u_x}\frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} + \dot{u_y}\frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \tag{15}$$

et

$$\dot{\rho} = \frac{1}{Z}(\dot{X}cos(\theta) + \dot{Y}sin(\theta) + \dot{\theta}(Ycos(\theta) - Xsin(\theta))) - \dot{Z}\frac{(Xcos(\theta) + Ysin(\theta))}{Z^2} \tag{16}$$

ce qui nous amène au résultat. □

Il nous faut maintenant le lien entre le mouvement du miroir et celui de la réflexion de la droite dans l'espace. La matrice d'interaction liant le mouvement $({}^c\dot{\mathbf{X}}_R, {}^c\dot{\mathbf{u}}_R)$ de la droite $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ au mouvement du miroir ${}^c\mathbf{v}_m$ exprimé dans le repère de la caméra est (voire preuve en annexe) :

$$\begin{pmatrix} {}^c\dot{\mathbf{X}}_R \\ {}^c\dot{\mathbf{u}}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_\nu & \mathbf{L}_{\omega X} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{L}_{\omega u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^c\nu_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} \tag{17}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{L}_\nu = -2\mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{L}_{\omega X} = -2(d[\mathbf{n}]_\times + [{}^c\mathbf{X}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2) \\ \mathbf{L}_{\omega u} = -2([{}^c\mathbf{u}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2) \end{cases} \tag{18}$$

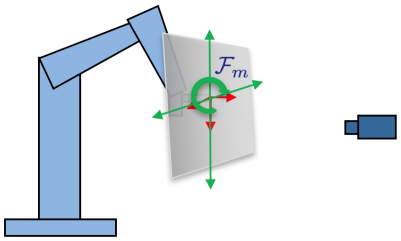

FIGURE 4 – Invariance de l'image lors de translations ou rotations (en vert).

Finalement, nous avons les coefficients de la matrice d'interaction $\mathbf{L_d}$ qui est définie par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{L_d} \begin{pmatrix} {}^c\mathbf{v}_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} \tag{19}$$

avec

$$\mathbf{L_d} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_v & \mathbf{L}_{\omega X} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{L}_{\omega u} \end{pmatrix} \tag{20}$$

où $[\mathbf{v}]_\times$ est la matrice anti-symmétrique associée au vecteur $\mathbf{v}$: $[\mathbf{v}]_\times = [\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}$.

Pour contrôler les mouvements du miroir dans son propre repère $\mathcal{F}_m$, nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m \begin{pmatrix} {}^m\mathbf{v}_m \\ {}^m\omega_m \end{pmatrix} \tag{21}$$

où ${}^c\mathbf{V}_m$ est la matrice de transformation liant le repère de la caméra à celui du miroir. Cette matrice évolue lors du processus d'asservissement, et doit donc être recalculée à chaque itération du schéma de contrôle. On obtient alors le Jacobien $\mathbf{J_d}$:

$$\mathbf{J_d} = -\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m{}^m\mathbf{V}_e{}^e\mathbf{J}(\mathbf{q}) \tag{22}$$

où ${}^e\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est le Jacobien du robot (dépendant de la position de son extrémité) exprimé dans le repère associé à son extrémité, et ${}^m\mathbf{V}_e$ est la matrice de transformation permettant de passer de ce repère à celui du miroir (cette matrice est constante tant que l'attache entre le miroir et l'extrémité est rigide).

3.3 Utilisation des degrés de libertés non-exploités

3.3.1 Nombre de degrés de liberté utilisés pour l'asservissement

On peut remarquer que des translations selon les axes x et y ainsi que des rotations autour de l'axe z dans le repère du miroir ne modifient pas l'image que l'on y voit (voire Figure 4). Nous allons donc vérifier que l'asservissement n'emploie que 3 degrés de liberté, c'est-à-dire vérifier que la première, la seconde et la sixième colonne de $\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m$ sont nulles.

Démonstration. Commençons par développer $\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m$. Par définition, nous avons :

$${}^c\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} {}^c\mathbf{R}_m & d[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m \\ \mathbf{O}_{3\times 3} & {}^c\mathbf{R}_m \end{pmatrix} \tag{23}$$

D'où :

$$\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m = \mathbf{L}\begin{pmatrix}\mathbf{L_v} & \mathbf{L}_{\omega X}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{L}_{\omega u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^c\mathbf{R}_m & d[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m\\ \mathbf{O}_{3\times3} & {}^c\mathbf{R}_m\end{pmatrix} = \mathbf{L}\begin{pmatrix}\mathbf{L}_v{}^c\mathbf{R}_m & \mathbf{L}_v d[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m + \mathbf{L}_{\omega X}{}^c\mathbf{R}_m\\ \mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{L}_{\omega u}{}^c\mathbf{R}_m\end{pmatrix} \tag{24}$$

On peut remarquer que :

$$[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m = {}^c\mathbf{R}_m[{}^c\mathbf{R}_m^T\mathbf{n}]_\times = {}^c\mathbf{R}_m[{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}]_\times = {}^c\mathbf{R}_m[{}^m\mathbf{n}]_\times \tag{25}$$

D'après l'égalité précédente, nous avons donc :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{L}_v d[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m = d\mathbf{n}\mathbf{n}^T[{}^m\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m = \mathbf{O}_{3\times3} \tag{26}$$

Avec (24) et (26), nous obtenons finalement :

$$\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m = \mathbf{L}\begin{pmatrix}\mathbf{L}_v{}^c\mathbf{R}_m & \mathbf{L}_{\omega X}{}^c\mathbf{R}_m\\ \mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{L}_{\omega u}{}^c\mathbf{R}_m\end{pmatrix} \tag{27}$$

Il suffit donc de montrer que les deux premières colonnes de $\mathbf{L}_v{}^c\mathbf{R}_m$, la troisème colonne de $\mathbf{L}_{\omega X}{}^c\mathbf{R}_m$ ainsi que celle de $\mathbf{L}_{\omega u}{}^c\mathbf{R}_m$ sont nulles. On a d'une part :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{L}_v{}^c\mathbf{R}_m = \mathbf{n}\mathbf{n}^{Tc}\mathbf{R}_m = \mathbf{n}^m\mathbf{n}^T \tag{28}$$

Or, par définition ${}^m\mathbf{n}^T = (0\ \ 0\ \ 1)^T$, donc en notant $\mathbf{n}^T = (n_1\ \ n_2\ \ n_3)^T$, on a :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{L}_v{}^c\mathbf{R}_m = \begin{pmatrix}0 & 0 & n_1\\ 0 & 0 & n_2\\ 0 & 0 & n_3\end{pmatrix} \tag{29}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\mathbf{L}_{\omega X}{}^c\mathbf{R}_m &= d[\mathbf{n}]_\times{}^c\mathbf{R}_m + [{}^c\mathbf{X}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\mathbf{R}_m = d{}^c\mathbf{R}_m[{}^m\mathbf{n}]_\times + [{}^c\mathbf{X}_R]_\times{}^c\mathbf{R}_m[{}^m\mathbf{n}]_\times^2\\ &= d{}^c\mathbf{R}_m\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + [{}^c\mathbf{X}_R]_\times{}^c\mathbf{R}_m\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{30}$$

et :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{L}_{\omega u}{}^c\mathbf{R}_m = [{}^c\mathbf{u}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\mathbf{R}_m = [{}^c\mathbf{u}_R]_\times{}^c\mathbf{R}_m[{}^m\mathbf{n}]_\times^2 = [{}^c\mathbf{u}_R]_\times{}^c\mathbf{R}_m\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{31}$$

Nous avons donc montré que la matrice $\mathbf{L_d}{}^c\mathbf{V}_m$ est bien de rang 3. □

3.3.2 Maintien de la cible dans le miroir

En pratique et contrairement à la théorie, le miroir est de taille finie. La cible peut donc sortir du miroir, dans le sens où on ne peut plus observer son image par le miroir. Comme nous venons de le voir, il y a trois degrés de liberté qui ne sont pas employés lors de l'asservissement, et qui ne modifient pas la position de l'image de la droite. Nous pouvons donc les utiliser afin de garder la droite dans le miroir.

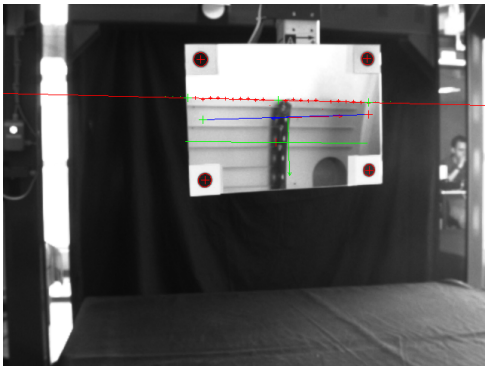

FIGURE 5 – Pour garder la cible dans le miroir, on aligne la ligne bleue (fixée au miroir) et la cible (ligne rouge)

Afin d'utiliser seulement les degrés de liberté inexploités par l'asservissement, il faut d'abord définir la seconde erreur e_2 traduisant le décalage de la droite sur le miroir par rapport à l'endroit où on voudrait la voir, puis multiplier cette erreur par la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{J_d^+}\mathbf{J_d})$. On obtient alors la loi de commande suivante :

$$\mathbf{v}_m = -\lambda(\mathbf{J_d^+} e + \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{J_d^+}\mathbf{J_d})e_2)) \tag{32}$$

où α est un facteur permettant de choisir l'importance de l'une des erreurs par rapport à l'autre. Il reste maintenant à définir l'erreur e_2 permettant de garder au mieux la droite dans le miroir.

Pour cela, une première idée est d'aligner l'image de la droite sur le miroir avec un des axes du miroir (voire Figure 5). La position désirée pour l'axe du miroir est alors celle de l'image de la droite par le miroir. Pour cela, nous utilisons la matrice d'interaction $\mathbf{L}_a$ définie par (voire preuve en annexe) :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} &= \mathbf{L}_a \begin{pmatrix}{}^c v_m\\ {}^c\omega_m\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-a\,cos(\theta) & -a\,sin(\theta) & A & sin(\theta)+YA+Bc & -cos(\theta)-XA+Bb & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_z c & u_z b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^c v_m\\ {}^c\omega_m\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{33}$$

avec $A = \frac{Xcos(\theta)+Ysin(\theta)}{Z^2}$, $B = \frac{Ycos(\theta)-Xsin(\theta)}{Z}$, $a = \frac{1}{Z}$, $b = \frac{u_y}{u_x^2+u_y^2}$ and $c = \frac{u_x}{u_x^2+u_y^2}$

Cependant, cette méthode engendre un glissement de l'image de la droite sur le miroir, ce qui pose problème puisque la droite n'est en pratique pas non plus toujours infinie. Une seconde idée est donc de vouloir simplement garder le centre de la droite visible sur le miroir au centre de ce dernier. Pour cela, nous utilisons un asservissement visuel classique, avec le point au centre de la droite que l'on veut avoir au centre du miroir dans l'image de la caméra. Cette méthode est plus efficace car elle évite bien le glissement de la droite en pratique.

3.4 Résultats expérimentaux

3.4.1 Présentation des expériences

Le robot utilisé est le robot Afma6, qui est un bras-robot avec 6 degrés de liberté (3 en translation et 3 en rotation). L'organisation du matériel des expérience est le suivant : un miroir est monté sur le robot, et en face est placée une caméra, orientée vers le robot, ainsi qu'un cible

FIGURE 6 – A gauche : le miroir monté sur le robot. A droite : le camera et les lignes servant de cibles

placée derrière la caméra (voire Figure 6). Les quatre points aux coins du miroirs servant à situer ce dernier dans le repère de la caméra.

Le déroulement est le suivant : l'image vue par la caméra est affiché à l'écran. Sur cette image, il faut repérer la ligne cible, c'est-à-dire l'image actuelle de la droite sur le miroir, ainsi que la position désirée sur l'image pour cette droite. Pour cela, on clique pour chacune de ces lignes sur deux de leurs points. Ensuite, l'asservissement visuel est lancé et s'arrête lorsque les deux lignes sont confondues, c'est-à-dire que l'erreur est inférieure à un seuil choisi (voire Figure 7).

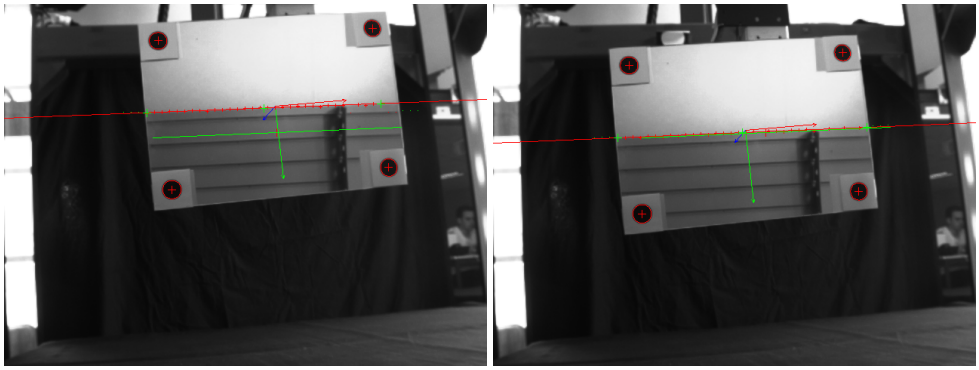

FIGURE 7 – A gauche : les positions initiales des lignes : la cible en rouge et la position désirée en vert. A droite : la position finale des lignes

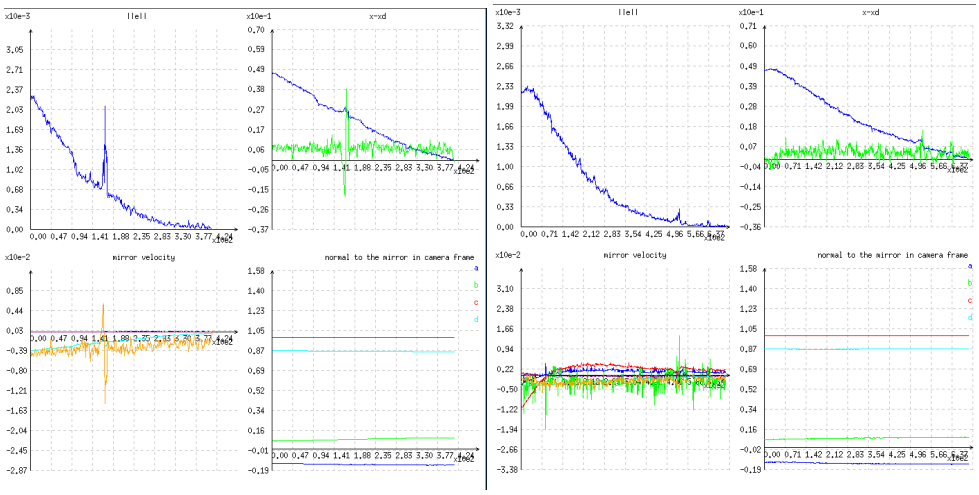

FIGURE 8 – Résultats des deux premières expériences. A gauche : Asservissement seul. A droite : Asservissement avec maintien de la cible dans le miroir

3.4.2 Résultats obtenus

Pour chaque expérience, nous obtenons quatre graphiques, représentant :
— la norme de l'erreur
— la différence entre la position actuelle et la position désirée
— la vitesse du miroir
— la normale du miroir dans le repère de la caméra

Les deux premières expériences sont effectuées avec une droite : la première avec l'asservissement seul, et la seconde avec le maintien de la droite dans le miroir. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 8. Pour les deux expériences, nous observons bien une décroissance exponentielle de la norme de l'erreur. Pour la seconde, on observe des mouvements supplémentaires correspondant à la tâche secondaire de maintien de la cible dans le miroir.

La troisième expérience est effectuée avec une droite aussi, mais dont l'orientation de départ est plus éloignée de l'orientation de la cible que lors des deux premières expériences. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 9. Sur le second graphique (en haut à droite), la courbe bleue correspond à ρ et la courbe verte à l'orientation θ.

Pour la quatrième et dernière expérience, l'asservissement visuel est employé sur deux droites. Les situations initiale et finale ainsi que les résultats sont présentés dans la Figure 10. Sur le second graphique (en haut à droite), les courbes bleue clair et verte correspondent aux erreurs d'orientation des droites, et les courbes rouge et bleue foncé à la distance ρ.

4 Miroirs sphériques

Dans cette partie, nous allons prendre pour cible un point $\mathbf{X}$. Nous allons essayer d'effectuer la même chose que précédemment, mais avec un miroir sphérique, qui permet d'avoir un champ de vision plus important qu'un miroir plan. Nous considérerons là aussi le cas du miroir mobile.

FIGURE 9 – Résultats de la troisième expérience

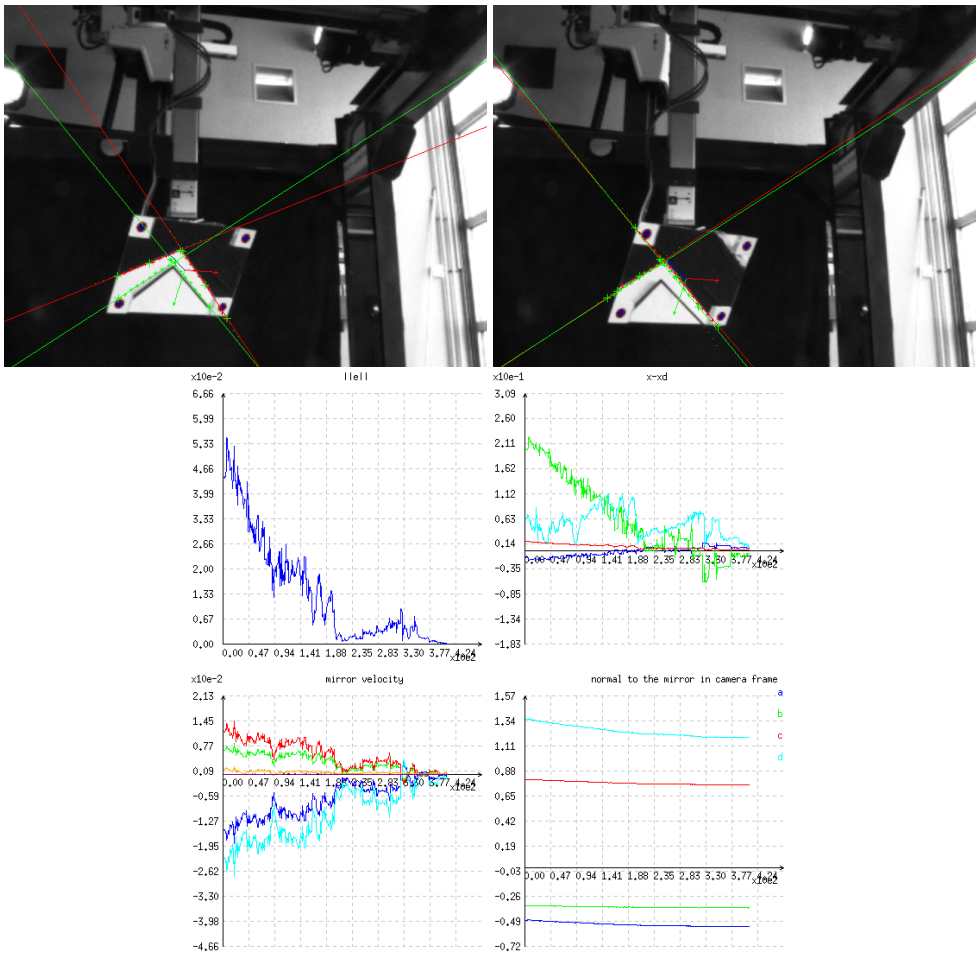

FIGURE 10 – Résultats de la quatrième expérience : en haut, situations initiale et finale ; en bas, courbes représentant les résultats.

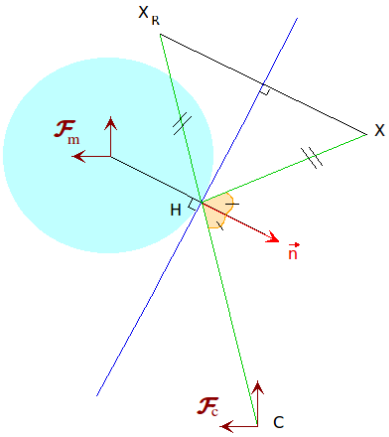

FIGURE 11 – Réflexion d'un point **X** sur un miroir sphérique

4.1 Similarité avec les miroirs plans

Soit $\mathcal{F}_c$ le repère de la caméra. Grâce aux symmétries de la sphère, nous pouvons définir le repère attaché au miroir $\mathcal{F}_m$ tel que la matrice de passage de $\mathcal{F}_m$ à $\mathcal{F}_c$ est (voire Figure 11) :

$$ {}^{c}\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & {}^{c}\mathbf{t}_m \\ \mathbf{0}_{3\times1} & 1 \end{pmatrix} \tag{34} $$

L'équation d'un miroir sphérique dans son propre repère est :

$$ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{35} $$

où r est le rayon de la sphère.

Quand un rayon de lumière est réfléchi sur un point ${}^{m}\mathbf{H}$ de la sphère, il est réfléchi de la même manière qu'avec un miroir plan ayant pour normale la normale de la sphère au point ${}^{m}\mathbf{H}$ et contenant ce point.

La normale à la sphère au point ${}^{m}\mathbf{H}$ est le vecteur ${}^{m}\mathbf{n}$ qui est donné par :

$$ {}^{m}\mathbf{n} = \frac{{}^{m}\mathbf{H}}{r} \tag{36} $$

Démonstration. D'après (35) et le calcul du gradient, la normale à la sphère en ${}^{m}\mathbf{H}$ est : $\frac{2{}^{m}\mathbf{H}}{||2{}^{m}\mathbf{H}||} = \frac{{}^{m}\mathbf{H}}{r}$. □

Soient ${}^{m}\mathbf{X}$ et ${}^{m}\mathbf{C}$ respectivement un point (la source d'un rayon de lumière) et le point de projection de la caméra. Soit ${}^{m}\mathbf{n}$ la normale à la sphère en ${}^{m}\mathbf{H}$, où est réfléchi le rayon de lumière qui part de ${}^{m}\mathbf{X}$, se réfléchit sur la sphère et passe par ${}^{m}\mathbf{C}$ (voire Figure 11). La réflexion est la même qu'avec un miroir plan ayant pour équation dans le repère du miroir :

$$ {}^{m}\mathbf{n}^T\mathbf{X} = r \tag{37} $$

Démonstration. L'équation du miroir plan fictif est de la forme :

$$ {}^{m}\mathbf{n}^T\mathbf{X} = d \tag{38} $$

avec $d > 0$. Comme ${}^m\mathbf{H}$ est dans le plan du miroir plan, d'après (38), nous avons :

$$d = {}^m\mathbf{n}^{T\,m}\mathbf{H} = \frac{{}^m\mathbf{H}^T}{r}{}^m\mathbf{H} = \frac{r^2}{r} = r \tag{39}$$

□

Nous voulons maintenant son équation dans le repère de la caméra. D'après (34), nous avons :

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{H} = {}^m\mathbf{H} + {}^c\mathbf{t}_m \\ \mathbf{n} = {}^m\mathbf{n} = \frac{{}^m\mathbf{H}}{r} = \frac{{}^c\mathbf{H}+{}^m\mathbf{t}_c}{r} \end{cases} \tag{40}$$

Ainsi, l'équation du miroir plan fictif dans le repère de la caméra est :

$$\mathbf{n}^T\mathbf{X} = d \tag{41}$$

avec

$$d = \mathbf{n}^{T\,c}\mathbf{H} \tag{42}$$

Avec ces informations, si nous avions une expression de ${}^c\mathbf{H}$ linéaire en ${}^c\mathbf{X}$ et ${}^c\mathbf{t}_m$, nous pourrions déterminer comment évolue le point ${}^c\mathbf{H}$ sur la sphère lorsque l'on bouge le miroir sphérique, puis déterminer les mouvements du miroir plan fictif, et ainsi, avec les travaux déjà effectués sur les miroirs plans, déterminer une loi de commande pour le miroir sphérique. Malheureusement, trouver le point de réflexion sur une sphère en fonction d'une source et une arrivée est un problème compliqué, dont la solution n'est pas exploitable ici. Il est démontré dans [1] que trouver ce point revient à résoudre une équation de degré 4 avec une inconnue, et que la situation est similaire avec un miroir cônique, ainsi qu'avec des miroirs paraboliques, hyperboliques et elliptiques (pour lesquels l'équation à résoudre est alors de degré 8).

4.2 Estimation de la loi de commande

D'après (40), nous pouvons remarquer que :

$$\begin{cases} {}^c\dot{\mathbf{H}} = {}^m\dot{\mathbf{H}} + {}^c\dot{\mathbf{t}}_m \\ \dot{\mathbf{n}} = {}^m\dot{\mathbf{H}} \\ \dot{d} = \dot{\mathbf{n}}^{T\,c}\mathbf{H} + \mathbf{n}^{T\,c}\dot{\mathbf{H}} \end{cases} \tag{43}$$

Bien que l'expression de ${}^c\mathbf{H}$ selon ${}^c\mathbf{X}$ et ${}^c\mathbf{t}_m$ est inexploitable ici, nous pouvons mesurer ses coordonnées dans l'image de la caméra : on peut l'exprimer en fonction de ${}^c\mathbf{X}_R$. Donc, si nous pouvions obtenir ${}^c\dot{\mathbf{H}}$, nous pourrions construire une loi de commande. D'après (), il suffit d'obtenir ${}^m\dot{\mathbf{H}}$.

Le principe de la réflexion de la lumière nous indique que l'angle entre la normale à la sphère et le rayon incident est le même que celui entre cette même normale et l'angle réfléchi. Ainsi, nous avons la symmétrie du vecteur $({}^m\mathbf{C} - {}^m\mathbf{H})$ par rapport à ${}^m\mathbf{n}$ qui est colinéaire au vecteur $({}^m\mathbf{X} - {}^m\mathbf{H})$, ce qui se traduit par :

$$(2\frac{{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^T}{r^2} - \mathbf{I})({}^m\mathbf{C} - {}^m\mathbf{H}) = \lambda({}^m\mathbf{X} - {}^m\mathbf{H}) \tag{44}$$

où $\lambda = \frac{||{}^m\mathbf{C}-{}^m\mathbf{H}||}{||{}^m\mathbf{X}-{}^m\mathbf{H}||}$.

Nous allons maintenant faire une approximation pour la suite. Nous allons considérer que $\dot{\lambda} = 0$ lorsqu'on applique une faible translation au miroir, ce qui est d'autant plus correct que la cible et la caméra sont éloignées du miroir.

On obtient alors, en dérivant (44) après avoir multiplié l'équation par r^2 :

$$2({}^m\dot{\mathbf{H}}{}^m\mathbf{H}^T + {}^m\mathbf{H}{}^m\dot{\mathbf{H}}^T)({}^m\mathbf{C} - {}^m\mathbf{H}) + (2{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^T - r^2\mathbf{I})({}^m\dot{\mathbf{C}} - {}^m\dot{\mathbf{H}}) = \lambda r^2({}^m\dot{\mathbf{X}} - {}^m\dot{\mathbf{H}}) \tag{45}$$

Soit, en isolant ${}^m\dot{\mathbf{H}}$:

$$(2\mathbf{M}({}^m\mathbf{H}, {}^m\mathbf{C}) + 2{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{C}^T - 4{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^T + (\lambda - 2)r^2\mathbf{I})^m\dot{\mathbf{H}} = \lambda r^{2m}\dot{\mathbf{X}} - 2{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^{Tm}\dot{\mathbf{C}} \tag{46}$$

avec

$$\mathbf{M}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \end{pmatrix} \tag{47}$$

En appliquant une vitesse ${}^c\mathbf{v}_m$ au miroir (on a ${}^c\mathbf{v}_m = {}^m\mathbf{v}_m$ puisqu'il n'y a pas de rotation entre les deux repères), on a donc :

$${}^m\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_h{}^c\mathbf{v}_m \tag{48}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h &= (2\mathbf{M}({}^m\mathbf{H}, {}^m\mathbf{C}) + 2{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{C}^T - 4{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^T + (\lambda - 2)r^2\mathbf{I})^{-1}(\lambda r^2 - 2{}^m\mathbf{H}{}^m\mathbf{H}^T) \\ &= (2\mathbf{M}({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c, {}^m\mathbf{t}_c) + 2({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c){}^m\mathbf{t}_c^T - 4({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c)({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c)^T + (\lambda - 2)r^2\mathbf{I})^{-1} \\ &(\lambda r^2 - 2({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c)({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c)^T) \end{aligned} \tag{49}$$

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_h \\ (\mathbf{L}_h^T{}^c\mathbf{H} + \frac{1}{r}((\mathbf{L}_h + \mathbf{I})^T({}^c\mathbf{H} + {}^m\mathbf{t}_c)))^T \end{pmatrix} {}^c\mathbf{v}_m \tag{50}$$

Comme nous l'avons vu dans le cas du miroir plan, nous avons également :

$${}^c\dot{\mathbf{X}}_R = 2\mathbf{n}\dot{d} - 2\dot{\mathbf{n}}d + 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R \tag{51}$$

Nous pouvons alors trouver une loi de commande, la seule différence avec le miroir plan étant la relation entre les mouvements du miroir et ceux de $\mathbf{n}$ et d. Cependant, on doit estimer certaines informations :

— ${}^m\mathbf{t}_c$, ce qui correspond à la position du centre du miroir dans le repère de la caméra. Connaissant le rayon de la sphère, on peut déduire la position de la sphère et donc de son centre.
— ${}^c\mathbf{H}$: ce point est visible sur l'image et facilement calculable en connaissant la position de la sphère (voire annexe).
— le facteur λ : d'après les deux points précédents, la seule information manquante est la position du point cible. Cependant, en estimant la profondeur de son image par le miroir, et connaissant la position du point de réflexion sur la sphère, on peut en déduire sa position.

Ces résultats peuvent s'étendrent à d'autres miroirs non-plans (côniques, paraboliques, hyperboliques et elliptiques), avec pour changement l'expression de la normale à la surface. Cependant, nous n'avons considéré ici que les translations grâce aux symmétries de la sphère : avec ces autres miroirs, nous devrions aussi considérer des rotations.

4.3 Cas du miroir fixe

Si nous essayons d'étendre ce que nous avons fait aux cas de la caméra ou de la cible mobile, nous pouvons remarquer que ces situations sont plus compliquées, puisque lorsqu'on déplace la caméra ou la cible, on a à la fois un mouvement du miroir plan fictif et un mouvement de la cible dans le repère de la caméra. On obtient donc l'équation suivante à la place de (51) :

$$ {}^{c}\dot{\mathbf{X}}_R = 2\mathbf{n}\dot{d} - 2\dot{\mathbf{n}}d + 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^{c}\mathbf{X}_R + (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^{c}\dot{\mathbf{X}} \tag{52} $$

Il faut donc connaître également ${}^{c}\dot{\mathbf{X}}$, ce qui peut être fait en estimant la position de ${}^{c}\mathbf{X}$ à l'aide de ${}^{c}\mathbf{H}$ et ${}^{c}\mathbf{X}_R$ qui sont mesurables.

5 Conclusion

Le but de nos travaux était d'étendre les résultats de [8] obtenus pour les miroirs plans avec des cibles constituées de points à des cibles constituées de droites, puis à des miroirs non-plans. Nous avons d'abord obtenu une loi de commande pour les miroirs plans et les droites, puis nous avons ajouté un contrôle complémentaire pour maintenir la droite dans le miroir. Le succès des expériences avec le miroir plan permet de valider nos résultats pour ce dernier. Enfin, nous avons essayer d'étendre les résultats à des miroirs sphériques en nous ramenant à des miroirs plans fictifs tangents à la sphère, mais nous avons du effectuer des approximations dûes à des équations non-linéaires.

Les travaux sur les miroirs non-plans peuvent cependant être poursuivis. En effet, on pourrait chercher à améliorer les approximations effectuées, ou utiliser une autre méthode pour avoir une loi de commande non-approchée. En particulier, nous nous sommes servis du cas du miroir mobile pour celui du miroir fixe : il existe peut être une méthode plus adaptée à la situation. De plus, nous n'avons considéré ici que des translations du miroir pour le miroir sphérique : pour les autres miroirs non-plans, il faudrait également travailler sur les rotations.

Remerciements

Je remercie d'abord mon encadrant, Éric Marchand, ainsi que toute l'équipe LAGADIC qui m'a accueilli pour ce stage, et qui m'a permis de faire mes premiers pas dans le monde de la recherche. Je remercie de même les autres stagiaires présents dans l'équipe pendant la même période. Je remercie également les quelques élèves de la classe qui ont également fait leur stage à Rennes et avec qui nous nous retrouvions chaque semaine le temps d'une soirée. Enfin, je remercie Thomas et Fabricio qui m'ont accueilli dans leur bureau, et avec qui j'ai pu partager de nombreux cookies.

Références

[1] Amit AGRAWAL, Yuichi TAGUCHI et Srikumar RAMALINGAM. « Beyond Alhazen's problem : Analytical projection model for non-central catadioptric cameras with quadric mirrors ». In : *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on*. IEEE. 2011, p. 2993–3000.

[2] Nicolas ANDREFF, Bernard ESPIAU et Radu HORAUD. « Visual servoing from lines ». In : *The International Journal of Robotics Research* 21.8 (2002), p. 679–699.

[3] Nicolas ANDREFF et Brahim TAMADAZTE. « Laser steering using virtual trifocal visual servoing ». In : *The International Journal of Robotics Research* (2015), p. 0278364915585585.

[4] François CHAUMETTE. « La relation vision-commande : théorie et application à des tâches robotiques ». Thèse de doct. 1990.

[5] François CHAUMETTE et Seth HUTCHINSON. « Visual servo control. I. Basic approaches ». In : *IEEE Robotics & Automation Magazine* 13.4 (2006), p. 82–90.

[6] Hicham HADJ-ABDELKADER. « Asservissement visuel en vision omnidirectionnelle ». Thèse de doct. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2006.

[7] Chaiyapol KULPATE, Mehran MEHRANDEZH et Raman PARANJAPE. « An eye-to-hand visual servoing structure for 3D positioning of a robotic arm using one camera and a flat mirror ». In : *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE. 2005, p. 1464–1470.

[8] Éric MARCHAND et François CHAUMETTE. « Visual servoing through mirror reflexion ». In : (2016). Soumis à IEEE, ICRA 2016.

[9] Gian Luca MARIOTTINI et al. « Planar catadioptric stereo : single and multi-view geometry for calibration and localization ». In : *Robotics and Automation, 2009. ICRA'09. IEEE International Conference on*. IEEE. 2009, p. 1510–1515.

[10] Youcef MEZOUAR et al. « Central catadioptric visual servoing from 3d straight lines ». In : *Intelligent Robots and Systems, 2004.(IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*. T. 1. IEEE. 2004, p. 343–348.

[11] Masahiko MIKAWA et al. « Visual servoing for micro mass axis alignment device ». In : *Intelligent Robots and Systems' 96, IROS 96, Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on*. T. 3. IEEE. 1996, p. 1091–1096.

ANNEXE

— Preuve de l'équation (9)

Démonstration. : D'après (5) et (6),

$$\begin{aligned}
{}^c\mathbf{X}_R &= {}^c\mathbf{R}_m {}^m\mathbf{X}_R + d\mathbf{n} \\
&= {}^c\mathbf{R}_m(\mathbf{I} - 2{}^m\mathbf{n}{}^m\mathbf{n}^T){}^m\mathbf{X} + d\mathbf{n} \\
&= {}^c\mathbf{R}_m({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{R}_m - 2{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^m\mathbf{R}_c^T){}^m\mathbf{X} + d\mathbf{n} \\
&= ({}^c\mathbf{R}_m - 2{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{R}_m)({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{X} - d{}^m\mathbf{n}) + d\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{R}_m({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{X} - d{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}) + d\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)({}^c\mathbf{X} - d\mathbf{n}) + d\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X} - d\mathbf{n} + 2d\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n} + d\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X} + 2d\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
{}^c\mathbf{u}_R &= {}^c\mathbf{R}_m {}^m\mathbf{u}_R \\
&= {}^c\mathbf{R}_m(\mathbf{I} - 2{}^m\mathbf{n}{}^m\mathbf{n}^T){}^m\mathbf{u} \\
&= {}^c\mathbf{R}_m({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{R}_m - 2{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^m\mathbf{R}_c^T){}^m\mathbf{u} \\
&= ({}^c\mathbf{R}_m - 2{}^m\mathbf{R}_c\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{R}_m)({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{u}) \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{R}_m({}^m\mathbf{R}_c{}^c\mathbf{u}) \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$\mathbf{n}$ étant un vecteur unitaire, $\mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$, ce qui nous amène à l'équation (9). □

— Preuve de l'équation (17)

Démonstration. : Comme seul le miroir est en mouvement, d'après l'équation (9), la vitesse $({}^c\dot{\mathbf{X}}_R, {}^c\dot{\mathbf{u}}_R)$ de la droite $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ est donnée par :

$$\begin{cases} {}^c\dot{\mathbf{X}}_R = 2\mathbf{n}\dot{d} + 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X} \\ {}^c\dot{\mathbf{u}}_R = -2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u} \end{cases} \tag{53}$$

où $\dot{\mathbf{n}}$ et $\dot{d}$ indiquent le mouvement du miroir dans le repère de la caméra. Comme nous l'avons déjà dit, nous voulons exprimé la matrice d'interaction seulement en fonction des données connues. Or, les coordonnées de $({}^c\mathbf{X}, {}^c\mathbf{u})$ sont inconnues lors de l'asservissement, tandis que celles de $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ sont mesurables. Nous voudrions donc exprimer $({}^c\dot{\mathbf{X}}_R, {}^c\dot{\mathbf{u}}_R)$ en fonction de $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$. Comme $({}^c\mathbf{X}_R, {}^c\mathbf{u}_R)$ est la droite symétrique de $({}^c\mathbf{X}, {}^c\mathbf{u})$ par rapport au plan du miroir, nous avons :

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{X} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X}_R + 2d\mathbf{n} \\ {}^c\mathbf{u} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{u}_R \end{cases} \tag{54}$$

En injectant (54) dans (53), on obtient :

$$\begin{cases} {}^c\dot{\mathbf{X}}_R = 2\mathbf{n}\dot{d} - 2\dot{\mathbf{n}}d + 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R \\ {}^c\dot{\mathbf{u}}_R = 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R \end{cases} \tag{55}$$

En effet, nous avons :

$$\begin{cases} {}^c\mathbf{X} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X}_R + 2d\mathbf{n} = {}^c\mathbf{X}_R - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X}_R + 2d\mathbf{n} \\ {}^c\mathbf{u} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{u}_R = {}^c\mathbf{u}_R - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{u}_R \end{cases} \tag{56}$$

Rappelons que $\mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$ et remarquons que $\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T\mathbf{n} = 0$ puisque $\dot{\mathbf{n}} = [\mathbf{n}]_\times {}^c\omega_m$ et $\mathbf{n}^T[\mathbf{n}]_\times = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
{}^c\dot{\mathbf{X}}_R &= 2\mathbf{d}\dot{d} + 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T)({}^c\mathbf{X}_R - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X}_R + 2d\mathbf{n}) \\
&= 2\mathbf{d}\dot{d} + 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R + 4(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T)\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X}_R - 4d(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T)\mathbf{n} \\
&= 2\mathbf{d}\dot{d} + 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R + 4(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{X}_R - 4d(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T\mathbf{n} + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T\mathbf{n}) \\
&= 2\mathbf{d}\dot{d} + 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R + 4\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X}_R - 4d\dot{\mathbf{n}} \\
&= 2\mathbf{d}\dot{d} - 2\dot{\mathbf{n}}d - 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R + 4\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{X}_R \\
&= 2\mathbf{d}\dot{d} - 2\dot{\mathbf{n}}d + 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R
\end{aligned} \tag{57}$$

et

$$\begin{aligned}
{}^c\dot{\mathbf{u}}_R &= -2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T)({}^c\mathbf{u}_R - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{u}_R) \\
&= -2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R + 4(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T)\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{u}_R \\
&= -2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R + 4(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T){}^c\mathbf{u}_R \\
&= -2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T + \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R + 4\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T{}^c\mathbf{u}_R \\
&= 2(\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R
\end{aligned} \tag{58}$$

ce qui démontre l'équation (55).
La matrice d'interaction liant la variation des paramètres $\mathbf{n}$ et d d'un plan (voire équation (7)) lorsqu'on lui applique un mouvement $({}^c\nu_m, {}^c\omega_m)$ est :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & [\mathbf{n}]_\times \\ -\mathbf{n}^T & \mathbf{0}_{1\times3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^c\nu_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} \tag{59}$$

où $[\mathbf{n}]_\times$ est la matrice anti-symmétrique associée au vecteur $\mathbf{n}$: $[\mathbf{n}]_\times = [\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$. D'après l'équation (59), nous avons :

$$2\mathbf{n}\dot{d} = 2\mathbf{n}(-\mathbf{n}^T \;\; \mathbf{0}_{1\times3}) \begin{pmatrix} {}^c\nu_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} = -2\mathbf{n}\mathbf{n}^T{}^c\nu_m \tag{60}$$

et

$$2\dot{\mathbf{n}}d = 2d(\mathbf{0}_{3\times3} \;\; [\mathbf{n}]_\times) \begin{pmatrix} {}^c\nu_m \\ {}^c\omega_m \end{pmatrix} = 2d[\mathbf{n}]_\times{}^c\omega_m \tag{61}$$

Finalement, $\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T$ étant une matrice anti-symmétrique, on peut démontrer que :

$$\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T = [[\mathbf{n}]_\times\dot{\mathbf{n}}]_\times = [[\mathbf{n}]_\times[\mathbf{n}]_\times{}^c\omega_m]_\times = [[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\omega_m]_\times \tag{62}$$

ce qui nous amène à

$$\begin{cases} (\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{X}_R = [[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\omega_m]_\times{}^c\mathbf{X}_R = -[{}^c\mathbf{X}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\omega_m \\ (\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}^T - \mathbf{n}\dot{\mathbf{n}}^T){}^c\mathbf{u}_R = [[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\omega_m]_\times{}^c\mathbf{u}_R = -[{}^c\mathbf{u}_R]_\times[\mathbf{n}]_\times^2{}^c\omega_m \end{cases} \tag{63}$$

Les équations (60), (61) and (63) montrent le résultat (17). □

— Preuve de l'équation (33) :

Démonstration. Nous avons déjà vu que :

$$\dot{\theta} = -\dot{u_x}\frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} + \dot{u_y}\frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \tag{64}$$

et

$$\dot{\rho} = \frac{1}{Z}(\dot{X}cos(\theta) + \dot{Y}sin(\theta) + \dot{\theta}(Ycos(\theta) - Xsin(\theta))) - \dot{Z}\frac{(Xcos(\theta) + Ysin(\theta))}{Z^2} \tag{65}$$

De plus, comme nous avons ici la droite qui est liée au miroir, nous avons :

$$\begin{cases} {}^c\dot{\mathbf{X}}_R = -{}^c\nu_m - {}^c\omega_m \times {}^c\mathbf{X}_R \\ {}^c\dot{\mathbf{u}}_R = -{}^c\omega_m \times {}^c\mathbf{u}_R \end{cases} \tag{66}$$

Nous avons donc :

$$\dot{\theta} = (\omega_y u_z - \omega_z u_y)\frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} - (\omega_z u_x - \omega_x u_z)\frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \tag{67}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = &-\tfrac{1}{Z}((\nu_x + \omega_y Z - \omega_z Y)cos(\theta) + (\nu_y + \omega_z X - \omega_x Z)sin(\theta) - \dot{\theta}(Ycos(\theta) - Xsin(\theta))) \\ &+(\nu_z + \omega_x Y - \omega_y X)\tfrac{(Xcos(\theta)+Ysin(\theta))}{Z^2}\end{aligned} \tag{68}$$

ce qui nous amène au résultat. □

— Position du point ${}^c\mathbf{H}$ en fonction de la position de la sphère (le centre de la sphère est le point ${}^c\mathbf{O}$ et son rayon est r) et du point observable ${}^c\mathbf{X}_R$:

$${}^c\mathbf{H} = \frac{{}^c\mathbf{X}_R}{||{}^c\mathbf{X}_R||^2}({}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O} - \sqrt{({}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O})^2 + ||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 - ||{}^c\mathbf{O}||^2)}) \tag{69}$$

Démonstration. : Les points ${}^c\mathbf{H}$, ${}^c\mathbf{X}_R$ et le point d'origine du repère de la caméra sont alignés. Nous avons donc :

$${}^c\mathbf{H} = \lambda {}^c\mathbf{X}_R \tag{70}$$

De plus, comme ${}^c\mathbf{H}$ est sur le miroir sphérique, nous avons :

$$||{}^c\mathbf{H} - {}^c\mathbf{O}||^2 = ||{}^c\mathbf{H}||^2 + ||{}^c\mathbf{O}||^2 - 2{}^c\mathbf{H}^T{}^c\mathbf{O} = r^2 \tag{71}$$

D'où :

$$\lambda^2||{}^c\mathbf{X}_R||^2 + ||{}^c\mathbf{O}||^2 - 2\lambda {}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O} = r^2 \tag{72}$$

On peut vérifier que le discriminant de cette équation est positif. En effet, notons $\mathbf{C}$ l'origine du repère de la caméra, et θ l'angle $(\widehat{{}^c\mathbf{O}\mathbf{C}{}^c\mathbf{X}_R})$. Comme nous considérons qu'il y a réflexion sur la sphère, on a :

$$|sin(\theta)| \leq \frac{r}{||{}^c\mathbf{O}||} \tag{73}$$

Nous avons alors le discriminant de l'équation (72) qui vérifie :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4{}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O})^2 - 4||{}^c\mathbf{X}_R||^2(||{}^c\mathbf{O}||^2 - r^2) \\ &= 4(||{}^c\mathbf{X}_R||^2||{}^c\mathbf{O}||^2cos^2(\theta) + ||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 - ||{}^c\mathbf{O}||^2) \\ &= 4||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 + ||{}^c\mathbf{O}||^2(cos^2(\theta) - 1)) \\ &= 4||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 - ||{}^c\mathbf{O}||^2sin^2(\theta)) \\ &\geq 4||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 - r^2) = 0\end{aligned} \tag{74}$$

On obtient donc :

$$\lambda = \frac{{}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O} \pm \sqrt{({}^c\mathbf{X}_R^T{}^c\mathbf{O})^2 + ||{}^c\mathbf{X}_R||^2(r^2 - ||{}^c\mathbf{O}||^2)}}{||{}^c\mathbf{X}_R||^2} \tag{75}$$

On garde la solution la plus petite puisque la droite passant par l'origine et par ${}^c\mathbf{X}_R$ coupe bien le cercle en deux points, et c'est celui le plus proche de l'origine que nous voulons ici. Nous avons donc bien montré le résultat. □