Équation de Bessel

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 4*, Cassini. Exercice 2.15 page 101

Recasage : 221, 241, 243

Proposition 1

La fonction $J_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$ *et est l'unique solution de l'équation différentielle*

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{E}$$

vérifiant $J_0(0) = 1$. *De plus, si* f *est solution de* (E) *sur* $]0, a[$ *alors* (f, J_0) *est libre si et seulement si* f *n'est pas bornée au voisinage de 0.*

$\triangleright$ On commence par chercher une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

– *Étape 1 : Analyse.* Soit f une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Or, pour $x \in]-R, R[$, on a

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n,$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n,$$

donc, comme f satisfait (E),

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto 0$, on en déduit :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}. \end{cases}$$

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et

$$a_{2n} = \frac{-a_{2(n-1)}}{(2n)^2} = \frac{a_{2(n-2)}}{(2n)^2 (2(n-1))^2} = \cdots = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2(n-1))^2 \cdots 2^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

– *Étape 2 : Synthèse.* Cette série entière a un rayon de convergence $R = \infty$ d'après le critère de d'Alembert puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^n (n!)^2}{4^{n+1} (n+1)!^2 (-1)^n} z^2 \right| = \frac{z^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors, les calculs précédents assurent que f est solution de (E).

Posons $J_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$. On a montré que J_0 est l'unique solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0 valant 1 en 0.

Soit f une solution de (E) sur un intervalle $]0, a[$.

– *Étape 3 : condition nécessaire.* Supposons que (f, J_0) est une famille liée. Alors f est bornée au voisinage de 0.

– *Étape 4 : condition suffisante.* Supposons que (f, J_0) est libre. Sur $]0, a[$, (E) s'écrit

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace des solutions est de dimension 2. Ainsi, (f, J_0) en est une base, donc le wronskien $w = f' J_0 - f J_0'$ ne s'annule pas. Or

$$\forall x \in]0, a[, \qquad w'(x) = \frac{-w(x)}{x}$$

donc il existe $C \neq 0$ telle que $\forall x \in]0, a[$, $w(x) = \frac{C}{x}$.

Supposons par l'absurde que f est bornée au voisinage de 0. Alors, comme $J_0(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ et $J_0'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, l'égalité

$$\forall x \in]0, a[, \qquad f'(x) J_0(x) - f(x) J_0'(x) = \frac{C}{x}$$

implique que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{C}{x}$. Alors, d'après le théorème de sommation des équivalents, pour $x_0 \in]0, a[$,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0^+}{} \int_{x_0}^{x} \frac{C}{t} \mathrm{d}t = C(\ln x - \ln x_0)$$

donc $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} C \ln x$: absurde.

– *Conclusion :* J_0 est bien l'unique solution de (E) vérifiant $J_0(0) = 1$. $\square$